А.П. Стахов

Роль «Золотого Сечения» и «Математики Гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики

Аннотация

В настоящем исследовании развивается новый взгляд на историю математики, и анализируются «стратегические ошибки», которые были допущены в математике в процессе ее развития. Одной из них является пренебрежение «золотым сечением», что привело к одностороннему освещению «Начал» Евклида, одностороннему взгляду на происхождение математики и исключению «Математики Гармонии» из структуры «классической математики». На протяжении тысячелетий выдающиеся мыслители, ученые и математики (Пифагор, Платон, Евклид, Леонардо да Винчи, Лука Пачоли, Кеплер, Цейзинг, Бине, Люка, Клейн), а также многие известные ученые и исследователи 20-го столетия (Эйзенштейн, Гика, Гримм, Лосев, Флоренский, Корбюзье, Тиммердинг, Воробьев, Хоггат, Шевелев, Шмелев, Марутаев, Сороко, Васютинский, Боднар, Суббота, Коробко, Петухов, Греждзельский, Шпинадель, Каппраф, Олсен, Газале, Эль-Нашие, Татаренко, Петруненко, Харитонов, Балакшин, Иванус, Шапаренко, Гринбаум, Мартыненко, Радюк, Цветков, Розин, Вейзе и др.) высоко оценили роль «золотого сечения» в развитии науки и культуры. Во второй половине 20-го века сделаны выдающиеся научные открытия, основанные на «золотом сечении» (квазикристаллы, фуллерены, закон структурной гармонии систем, закон преобразования спиральных биосимметрий, «золотые» геноматрицы и др.), которые свидетельствуют о том, что современная наука переходит на новый этап своего развития, когда «золотое сечение» и «Платоновы тела» становятся важнейшими математическими инструментами в исследовании явлений и структкур Природы.

> *Алгебру и Геометрию постигла одна и та же участь. За быстрыми успехами вначале следовали весьма медленные и оставили науку на такой ступени, где она еще далека от совершенства. Это произошло от того, что Математики все свое внимание обратили на высшие части Аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою.*
>
> Николай Лобачевский

1. Введение

Что такое математика? Каковы ее происхождение и история? В чем состоит связь математики с другими научными дисциплинами и в чем состоит отличие математики от других наук? Все эти вопросы всегда интересовали как математиков, так и представителей других наук. Математику всегда было принято считать образцом научной строгости. Ее часто называли «царицей наук», тем самым подчеркивая ее особый статус в науке. Именно поэтому появление книги «Математика. Потеря определенности» [1], написанной Морисом Клайном, почетным профессором Курантовского Института Математических Наук Нью-Йоркского Университета, оказалось настоящим шоком для математиков. Книга посвящена анализу кризиса, в котором оказалась математика в 20-м столетии в результате ее «нелогичного развития».

Настоящая статья является развитием идей, изложенных в книге [1]. Главная цель статьи состоит в том, чтобы развить новый взгляд на историю математики и показать, что в процессе развития математики в ней было допущено ряд «стратегических ошибок», которые повлияли на развитие математики и ее структуру. Другая цель состоит в том, чтобы показать, что в процессе развития «классической математики» из ее состава было исключено целое направление – «Математика Гармонии», которое развивалось с античных времен параллельно и независимо от развития «классической математики». «Математика Гармонии» является отражением в современной математике «Пифагорейского учения о числовой гармонии мироздания» и «Космологии Платона», которые получили достойное отражение в «Началах» Евклида. «Математика Гармонии» является источником новых идей в развитии математики, теоретической физики и компьютерной науки. Статья является своеобразным итогом почти 40-летнего научного творчества автора по созданию «Математики Гармонии» как нового междисциплинарного направления современной науки [2-79].

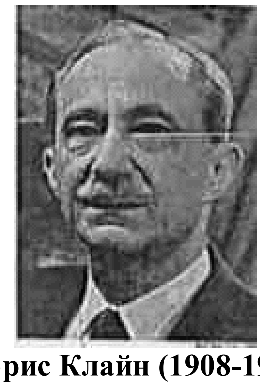
2. Математика. Утрата неопределенности

В своей замечательной книге [1] Клайн пишет:

«История математики знает не только величайшие взлеты, но и глубокие падения ... Осознание того, что сверкающая великолепием витрина человеческого разума далеко не совершенна по своей структуре, страдает множеством недостатков и подвержена чудовищным противоречиям, могущим вскрыться в любой момент, нанесло еще один дар по статусу математики. Но бедствия, обрушившиеся на математику, были вызваны и другими причинами. Тяжелые предчувствия и разногласия между математиками были обусловлены самим ходом развития математики за последние сто лет. Большинство математиков как бы отгородились от внешнего мира, сосредоточив усилия на проблемах, возникающих внутри самой математики, - по существу, они порвали с естествознанием».

И далее:

«Естествознание было кровью и плотью математики и питало ее живительными соками. Математики охотно сотрудничали с физиками, астрономами, химиками и инженерами в решении различных научно-технических проблем, а часто и сами являлись выдающимися физиками и астрономами. В 17-18 вв., а также на протяжении большей части 19 в. различие между математикой и теоретическим естествознанием отмечалось крайне редко. Многие ведущие математики, работая в области астрономии, механики, гидродинамики, электромагнетизма и теории упругости, получили здесь несравненно более важные результаты, чем в собственно математике. **Математика была царицей и одновременно служанкой естественных наук (***выделено А.С.***)**».



Морис Клайн (1908-1992)

Клайн подчеркивает, что задачи «чистой математики», которые выдвинулись на передний план в математике 20-го века, не очень сильно интересовали наших великих предшественников. По этому поводу Клайн пишет:

«Критику чистой математики – математики ради математики - можно найти в сочинении Френсиса Бэкона «О достоинстве и приумножении наук» (1620). Бэкон возражал против чистой, мистической и самодовольной математики, «полностью абстрагированной от материи и физических аксиом», сетуя на то, что таково уж свойство человеческого ума: не имея достаточных сил для решения важных проблем, он тратит себя на всякие пустяки».

В своем классическом труде «Аналитическая теория тепла» великий физик и математик Фурье подчеркивает важность математического подхода к решению физических задач:

«Глубокое изучение природы – наиболее плодотворный источник математических открытий. Такое изучение не только обладает преимуществами хорошо намеченной цели, но и исключает возможность неясной постановки задач и бесполезных выкладок. Оно является надежным средством построения самого анализа и позволяет открывать наиболее значительные идеи, которым суждено навсегда сохраниться в науке. **Фундаментальны те идеи, которые отражают явления природы ...** (*выделено А.С.*)».

В 1895 г. Феликс Клейн, бывший в то время признанным главой математического мира, также счел необходимым выразить протест против тяги к абстрактной, чистой математики:

«Трудно отделиться от ощущения, что быстрое развитие современной математики таит в себе для нашей науки опасность все более усиливающейся изоляции. Тесная взаимосвязь между математикой и теоретическим естествознанием, существовавшая к вящей выгоде для обеих сторон, с возникновением современного анализа грозит прерваться».

Рихард Курант, возглавлявший Институт Математических наук при Нью-Йоркском университете, также неодобрительно относился к увлечению чистой математикой. В 1939 г. он писал:

«Серьезная угроза самой жизни науки проистекает из утверждения, будто математика представляет собой не что иное, как систему заключений, выводимых из определений и постулатов, которые должны быть непротиворечивыми, а в остальном произвольными порождениями свободной воли математиков. Если бы подобное описание соответствовало действительности, то в глазах любого сколько-нибудь разумного человека математика не обладала бы никакой привлекательностью. Она была бы ничем не мотивированной бесцельной игрой с определениями, правилами и силлогизмами. Представление о том, будто разум по своему произволу может создавать осмысленные аксиоматические системы, - полуправда, способная лишь вводить неискушенных людей в заблуждение. Только сдерживаемый дисциплиной ответственности перед органическим целым свободный разум, руководствуясь внутренней необходимостью, может создавать результаты, имеющие научную ценность».

В настоящее время математики вновь обратились к решению задач, которые были в свое время поставлены известными математиками прошлого. Одной из них считается *Великая теорема Ферма,* которая формулируется очень просто. Доказать, что при $n>2$ никакие целые числа x, y, z не удовлетворяют соотношению $x^n + y^n = z^n$. Теорема была сформулирована Пьером Ферма в 1637 на полях книги «Арифметика» Диофанта с припиской, что найденное им остроумное доказательство этой теоремы слишком длинно, чтобы его можно было здесь поместить. Как известно, многие выдающиеся математики (среди которых можно назвать имена Эйлера, Дирихле и Лежандра) занимались решением этой задачи. Однако, последний шаг в доказательстве теоремы был сделан только в сентябре 1994 года английским математиком Эндрю Уайлсом. 130-страничное доказательство было опубликовано в журнале «Annals of Mathematics».

Как известно, в 19-м веке Гаусс считался одним из наиболее универсальных математических умов мира. Он был специалистом во многих областях математики, в частности, в области теории чисел. В этой связи любопытно озвучить мнение Гаусса по поводу *Великой теоремы Ферма,* приведенное в книге Клейна [1]. В одном из своих писем Гаусс объяснил, почему он не занимался доказательством «проблемы Ферма». С его точки зрения, «**гипотеза Ферма – это изолированная, ни с чем не связанная теорема и поэтому не представляет особого интереса (***выделено А.С.***)»**. То есть, Гаусс не проявил к теореме Ферма того ажиотажного интереса, который возник к этой задаче в 20-м веке. Следует еще раз подчеркнуть, что Гаусс всегда живо интересовался всеми новыми математическими теориями, возникавшими в 19-м веке, в частности, благодаря его поддержке в математиеском сообществе стали известными работы Лобачевского по неевклидовой геометрии. Несомненно, что мнение Гаусса несколько умаляет открытие Эндрю Уайлса. И в этой связи мы вправе поставить следующие вопросы: (1) Каково значение *Великой теоремы Ферма* для развития современной науки? (2) Можно ли сравнить решение этой задачи к открытием неевклидовой геометрии, сделанным Николаем Лобачевским в первой половине 19 в. или открытием «законов электромагнетизма», сделанным Максвеллом в конце 19-го века? (3) Не является ли *Великая теорема Ферма* «бесцельной игрой» ума и всего лишь демонстрацией могущества человеческого интеллекта – и не более того? Такие же вопросы мы можем поставить и по поводу других «великих математических задач», которые находятся в центре внимания современных «чистых» математиков.

Таким образом, вслед за Бэконом, Фурье, Клейном, Курантом и другими выдающимися математиками, Морис Клайн усматривает причину современного кризиса в математике в ее отходе от естествознания, которое в течение многих столетий было главным источником развития математики. **Отход математики от теоретического естествознания является крупнейшей «стратегической ошибкой» математики 20-го века и главной причиной ее современного кризиса.** Но в развитии математики существовали и другие «стратегические ошибки», анализ которых приведен ниже.

3. «Стратегические ошибки» в развитии математики

3.1. Пренебрежение «началами»

А.Н. Колмогоров в предисловии к книге А.Лебега «Об измерении величин» [80] замечает, что «у математиков существует склонность, уже владея законченной математической теорией, стыдиться ее происхождения. По сравнению с кристаллической ясностью развития теории, начиная уже с готовых ее основных понятий и допущений, кажется грязным и неприятным занятием копаться в происхождении этих основных понятий и допущений. Все здание школьной алгебры и весь математический анализ могут быть воздвигнуты на понятии действительного числа без всякого упоминания об измерении конкретных величин (длин, площадей, промежутков времени и т.д.). Поэтому на разных ступенях обучения с разной степенью смелости проявляется одна и та же тенденция: возможно скорее разделаться с введением чисел и дальше уже говорить только о числах и соотношениях между ними. Против этой тенденции и протестует Лебег».

Андрей Колмогоров (1903 – 1987)

В этом высказывании Колмогоров подметил одну особенность математиков – стыдливое отношение к «началам» математической науки, а точнее - пренебрежение «началами» («на разных ступенях обучения и с разной степенью смелости»). Задолго до Колмогорова на эту тенденцию в развитии математики обратил внимание Николай Лобачевский. Высказывание Лобачевского по поводу «пренебрежения началами» взято в качестве эпиграфа настоящей статьи.

Николай Лобачевский (1792 – 1856)

Но именно Лобачевский своими исследованиями показал, что «начала» математической науки, в частности, «Начала» Евклида, являются неисчерпаемым источником новых математических идей и открытий. Свои знаменитые «Геометрические исследования по теории параллельных линий» (1840) Лобачевский начинает следующими словами:

«В геометрии я нашел некоторые несовершенства, которые я считаю причиной того, что эта наука ... до настоящего времени не вышла ни на один шаг за пределы того состояния, в каком она к нам перешла от Евклида. К этим несовершенствам я отношу неясность в первых понятиях о геометрических величинах, способы, которыми мы себе представляем измерение этих величин, и, наконец, важный пробел в теории параллельных линий ...».

Как известно, Лобачевский, в отличие от других математиков, не пренебрегал «началами». Тщательное изучение 5-го постулата Евклида («важный пробел в теории параллельных линий») привело Лобачевского к созданию неевклидовой геометрии – наиболее крупного математического открытия 19-го века.

3.2. Пренебрежение «золотым сечением»

Как известно, особую роль в учении пифагорейцев, в том числе и Платона, играло «золотое сечение», которое в тот период называлось «делением в крайнем и среднем отношении». Алексей Лосев, гениальный российский философ и исследователь эстетики античной эпохи и Возрождения, выразил свое отношение к «золотому сечению» и «Космологии Платона» в следующих словах:

"С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - Золотого Сечения... Их (древних греков – А.С.) систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьезный результат безудержной и дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомощность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть, используя диалектико-материалистическое представление о культуре и ища ответа в особенностях античного общественного бытия».

Алексей Лосев (1893-1988)

Возникает вопрос: каким образом «золотое сечение» отражено в современной математике? Ответ однозначный – никак. Именно в математике идеи гармонии и «золотого сечения» считаются результатом «безудержной и дикой фантазии» пифагорейцев. И поэтому изучение «золотого сечения» считается занятием, недостойным серьезного математика. К сожалению, пренебрежение «золотым сечением» мы находим и в теоретической физике. В 2006 г. издательство «БИМОН» (Москва) опубликовало уникальный научный сборник «Метафизика. Век 21» [81]. В предисловии составитель и редактор сборника профессор Ю.С. Владимиров (Московский университет) написал следующее:

«Третья часть сборника посвящена осмыслению многочисленных примеров проявления «золотой пропорции» в искусстве, биологии и в окружающей нас действительности. Однако, как это не парадоксально, в современной теоретической физике «золотая пропорция» никак не отражена. Чтобы убедиться в этом, достаточно пролистать 10-томник теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица. Назрело время заполнить этот пробел в физике, тем более, что «золотая пропорция» тесно связана с метафизикой, с тринитарностью».

Таким образом, пренебрежение «золотым сечением» и идеей Гармонии – еще одна «стратегическая ошибка» не только математики, но и теоретической физики.

Эта ошибка породила ряд других «стратегических ошибок» в развитии математики.

3.3. Одностороннее освещение «Начал» Евклида

Как известно, «Начала» Евклида являются главным трудом греческой науки, посвященным аксиоматическому построению геометрии. Такой взгляд на «Начала» наиболее распространен в современной математике.

Евклид (около 325 до н.э. - около 265 до н.э.)

Однако, кроме «аксиоматической» точки зрения существует и другая точка зрения на «Начала», высказанная **Проклом Диадохом** (412-485), одним из наиболее блестящих комментаторов «Начал» Евклида. Как известно, 13-я, то есть, заключительная книга «Начал» Евклида посвящена изложению теории пяти правильных многогранников, которые играли главенствующую роль в «Космологии Платона» и в современной науке известны под названием «Платоновых тел». Именно на это обстоятельство и обращает внимание Прокл. Как подчеркивает Эдуард Сороко [82], по мнению Прокла, Евклид «создавал «Начала» якобы не с целью изложения геометрии как таковой, а чтобы дать полную систематизированную теорию построения пяти «Платоновых тел», попутно осветив некоторые новейшие достижения математики». Таким образом, «гипотеза Прокла» позволяет высказать предположение, что хорошо известные в античной науке **"Пифагорейская доктрина о числовой гармонии Мироздания»** и **«Космология Платона»,** основанная на правильных многогранниках, были воплощены в величайшем математическом сочинении греческой математики, «Началах» Евклида. С этой точки зрения **мы можем рассматривать «Начала» Евклида как первую попытку создать "Математическую теорию Гармонии», что было главной идеей греческой науки.**

И эта гипотеза подтверждается геометрическими теоремами, изложенными в «Началах». Одной из них является Теорема 2.11, в которой описана «**задача о делении в крайнем и среднем отношении».** Это деление, которое было названо позже «золотым сечением», было использована Евклидом для геометрического построения равнобедренного треугольника с углами 72°, 72° и 36° (*«золотого» равнобедренного треугольника*), *пентагона* и *додекаэдра,* основанных на золотом сечении, то есть современные историки математики отказываются замечать, что существенная часть «Начала» Евклида посвящена «золотому сечению» и связанным с ним геометрическим фигурам, а заключительная книга «Начал» посвящена изложению теории «Платоновых Тел», которые в космологии Платона символизировали основные элементы или «стихии» и Гармонию Мироздания.

Таким образом, мы можем констатировать, что **оригинальный взгляд Прокла на «Начала» Евклида не воспринят современной математикой, что следует рассматривать как еще одну «стратегическую ошибку» в развитии математики, которая привела к искаженному взгляду на всю историю математики** [83].

3.4. Односторонний взгляд на происхождение математики

Как известно, традиционный взгляд на происхождение математики [83] состоит в том, что в основе создания математики лежали две «ключевые» проблемы, которые возникли в науке на ранних этапах ее развития: **«проблема счета»** и **«проблема измерения».** Проблема счета привела к созданию первых способов представления чисел и выполнения над числами арифметических операций (Вавилонская 60-ричная система счисления, египетская десятичная арифметика и др). Главным итогом этого процесса было формирование понятия **натурального числа –** фундаментального понятия математики, без которого немыслимо существование математики. Проблема измерения лежит у истоков создания **геометрии** («измерение земли»). Однако, открытие **несоизмеримых отрезков** считается важнейшим математическим открытием в этой области. Это открытие привело к введению понятия **иррационального числа -** второго фундаментального понятия математики, без которого невозможно представить существование современной математики.

Концепции **натурального числа** и **иррационального числа** лежат в основе «классической математики» и «классического теоретического естествознания». Заметим, что большинство «математические констант», в частности, «число π» и «Эйлерово число e» являются иррациональными (трансцендентными) числами. Эти числа лежат в основе важнейших «элементарных функций», в частности, тригонометрических функций (число π) и «гиперболических функций» (число e).

К сожалению, историки математики, рассматривая главные проблемы математики, которые лежат в основе ее происхождения, пренебрегли «проблемой Гармонии», которая была выдвинута Пифагором, Платоном и нашла свое отражение в «Началах» Евклида. **В результате в современной математике сформировался односторонний взгляд на происхождение математики, что является еще одной «стратегической ошибкой» в развитии математики.** Если бы «проблема гармонии» была включена в состав важнейших проблем, повлиявших на развитие математики на этапе ее зарождения, структура современной математики выглядела бы по-другому.

3.5. Величайшая математическая мистификация 19-го столетия

Крупные «стратегические ошибки» были сделаны и в последующие периоды развития математики. В 19-м веке такая ошибка состояла в том, что без достаточного критического анализа **«Теория бесконечных множеств Кантора»** была возведена на пьедестал «величайших математических открытий». В своем выступлении на 1-м Международном Конгрессе Математиков в Цюрихе (1897) знаменитый математик Адамар подчеркнул, что главная привлекательная черта Канторовской теории множеств состоит в том, что впервые в математической истории дана классификация множеств на основе концепции «кардинального числа». А удивительные математические результаты, которые вытекают из теории множеств Кантора, должны вдохновить математиков на новые открытия.

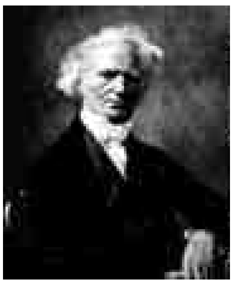
К сожалению, обнаружение парадоксов в Канторовской теории множеств и возникший при этом кризис в основаниях математики остудили энтузиазм математиков в оценке этой теории. Последнюю точку в оценке «Канторовской теории множеств» и введенного Кантором понятия **«актуальной бесконечности»** поставил российский математик Александр Зенкин [84], который показал, что в теории Кантора допущены грубые математические ошибки, а введенное им понятие «актуальной бесконечности» является внутренне противоречивым понятием («завершенная бесконечность»), которое не может быть положено в основу непротиворечивой математики.

Георг Кантор (1845-1918)

Таким образом, «Канторовская теория бесконечных множеств» является ни чем иным, как величайшей математической мистификацией 19-го века, и ее принятие математиками 19-го века без должного критического анализа является еще одной «стратегической ошибкой» в развитии математики. Если бы Канторовская теория бесконечных множеств была подвергнута серьезному анализу еще в 19-м веке, возможно, удалось бы избежать возникновения современного кризиса в основаниях математики.

3.6. Недооценка формул Бине

В 19 в. в развитии теории «золотого сечения» было сделано важное математическое открытие. Речь идет о так называемых **«формулах Бине»,** выведенных французским математиком Бине в 19-м веке.



Бине (1786 – 1856)

Рассмотрим формулы Бине для чисел Фибоначчи $F(n)$ и чисел Люка $L(n)$:

$$F(n)=\begin{cases}\dfrac{\Phi^{n}+\Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \textit{для} \quad n=2k+1\\ \dfrac{\Phi^{n}-\Phi^{-n}}{\sqrt{5}} & \textit{для} \quad n=2k\end{cases} \tag{1}$$

$$L(n)=\begin{cases}\Phi^{n}+\Phi^{-n} & \textit{для} \quad n=2k\\ \Phi^{n}-\Phi^{-n} & \textit{для} \quad n=2k+1\end{cases} \tag{2}$$

где n=0, ±1, ±2, ±3, ... , $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ - золотая пропорция – положительный корень простейшего алгебраического уравнения:

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{3}$$

которое называется *уравнением золотой пропорции*.

Кажется невероятным, что формулы (1), (2) действительно задают две знаменитые целочисленные последовательности $F(n)$ и $L(n)$, задаваемые также простейшими рекуррентными соотношениями:

$$F(n) = F(n\text{-}1) + F(n\text{-}2);\ F(0) = 0,\ F(1) = 1 \tag{4}$$

$$L(n) = L(n\text{-}1) + L(n\text{-}2);\ L(0) = 2,\ L(1) = 1. \tag{5}$$

Ряды Фибоначчи и Люка в бесконечных пределах (n=0, ±1, ±2, ±3, ...) выглядит следующим образом:

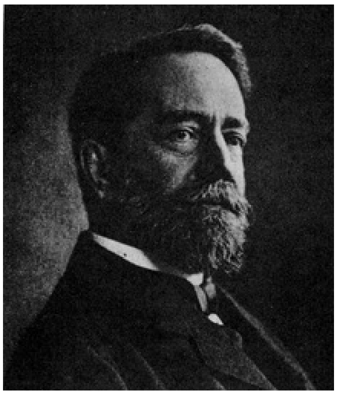
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F(n)$	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
$F(-n)$	0	1	-1	2	-3	5	-8	13	-21	34	-55
$L(n)$	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
$L(-n)$	2	-1	3	-4	7	-11	18	-29	47	-76	123

Анализ формул Бине (1), (2) дает нам возможность ощутить истинное «эстетическое наслаждение» и еще раз убедиться в мощи человеческого разума. Действительно, мы знаем, что числа Фибоначчи и Люка являются целыми числами. Но из «формул Бине» вытекает, что числа Фибоначчи $F(n)$, как и числа Люка $L(n)$, с помощью формулы Бине выражаются через «золотую пропорцию», которая является иррациональным числом. Таким образом, уникальность «формул Бине» состоит в том, что они выражают связь между целыми числами и иррациональными.

Удивительно, что в классической математике «формулы Бине» не получили должного признания, подобно другим известным математическим формулам («формулы Эйлера», «формулы Муавра» и т.д.). И не все математики их знают. Изучение «формул Бине», а также «золотого сечения», «чисел Фибоначчи и Люка», как правило, не включается в современные математические программы школьного и университетского образования. По-видимому, такое отношение к «формулам Бине» связано с «золотым сечением», которое всегда вызывало «аллергию» у математиков. **Но главная «стратегическая ошибка» в оценке «формул Бине» состоит в том, что математики не усмотрели в «формулах Бине» прообраз нового класса гиперболических функций – *гиперболических функций Фибоначчи и Люка,* которые были открыты украинскими учеными Боднаром, Стаховым, Ткаченко и Розиным спустя 100 лет после открытия «формул Бине» [31, 39, 40, 46, 55, 85].** Если бы «гиперболические функции Фибоначчи и Люка» были открыты в 19-м столетии, то гиперболическая геометрия и ее приложения в физической науке выглядели бы иначе.

3.7. Недооценка «икосаэдрической» идеи Феликса Клейна

В 19-м веке выдающийся математик Феликс Клейн попытался объединить все ветви математики на основе икосаэдра, Платонового тела, дуального додекаэдру [86]. По существу исследования Клейна можно рассматривать как дальнейшее развитие так называемой «икосаэдро-додекаэдрической идеи», которая, начиная с Пифагора, Платона, Евклида и Кеплера, «красной нитью» проходит через всю историю науки. Клейн трактует икосаэдр, основанный на золотом сечении, как геометрический объект, из которого, по его мнению, вытекают ветви пяти математических теорий: *геометрии, теории Галуа, теории групп, теории инвариантов* и *дифференциальные уравнения.* Главная идея Клейна предельно проста: "Каждый уникальный геометрический объект так или иначе связан со свойствами икосаэдра». **К сожалению, эта замечательная идея не получила развития в современной математике, что является еще одной «стратегической ошибкой» в развитии математики.** Развитие этой идеи могло бы повлиять на структуру математической науки и привело бы к объединению многих важных разделов математики на основе икосаэдра, основанного на «золотом сечении».



Феликс Клейн (1849 - 1925)

3.8. Недооценка математического открытия Джорджа Бергмана

В математике существует одна «странная» традиция. Математикам свойственно недооценивать математические достижения некоторых своих современников и переоценивать достижения других математиков (как это случилось с теорией множеств Кантора). К сожалению, действительно эпохальные математические открытия вначале подвергаются резкой критике и даже осмеянию со стороны известных математиков и только спустя примерно 50 лет, как правило, после смерти авторов математических открытий, новые математические теории признаются и занимают достойное место в математике. Драматические судьбы Лобачевского, Абеля, Галуа и других математиков слишком хорошо известны, чтобы их подробно здесь описывать.

В 1957 г. американский математик Джордж Бергман опубликовал статью «A number system with an irrational base» [87] в известном математическом журнале *Mathematics Magazine*. В этой статье автор предложил весьма необычное расширение понятия позиционной системы счисления. Он предложил использовать в качестве основания системы счисления золотую пропорцию $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Если теперь использовать последовательность чисел Φ^i $\{i=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\}$ в качестве «весов разрядов» некоторой двоичной системы счисления, использующей двоичные цифры 0 и 1, то мы получим «двоичную» (то есть использующую цифры 0 и 1) систему счисления, имеющую иррациональное основание Ф. Система счисления Бергмана может быть задана в виде следующего математического выражения:

$$A = \sum_i a_i \Phi^i \tag{6}$$

где A – некоторое действительное число, a_i – двоичные цифры 0 или 1, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$, Φ^i – вес i-й цифры в системе счисления (95), Ф («золотая пропорция») — основание системы счисления.

Джордж Бергман

К сожалению, статья Бергмана [87] не была замечена в тот период ни математиками, ни инженерами. Журналисты были удивлены только тем фактом, что Джордж Бергман написал свою статью в возрасте 12 лет, в связи с чем в журнале «TIMES» была даже опубликована статья о юном математическом даровании Америки. Но математики того времени, впрочем как и сам Бергман, не сумели оценить значение этого открытия для развития математической науки. Прошло 50 лет с момента публикации статьи Бергмана [87]. И в соответствии с «математической традицией» настала пора оценить роль «системы Бергмана» в развитии современной математики.

Важно подчеркнуть, что любое натуральное число может быть представлено в виде конечной суммы степеней «золотой пропорции» в виде «формулы Бергмана» (6). И если бы пифагорейцы знали «формулу Бергмана» для натуральных чисел, то, зная отношение пифагорейцев к натуральным числам и «золотому сечнию», нет никаких сомнений в том, что их знаменитый тезис: «Все есть число», был бы заменен на новый тезис: «Все есть золотая пропорция»!

Стратегический просчет математиков 20-го века состоит в том, что **они просто не заметили математическое открытие юного американского математика Джорджа Бергмана, которое по праву может быть отнесено к разряду крупнейших математических открытий в области систем счисления (после открытия вавилонянами позиционного принципа представления чисел) и которое может дать начало новой теории чисел, основанной на «золотой пропорции».** «Формула Бергмана» (6) открывает новый путь в развитии аналитической теории чисел.

4. Учение о гармонии в своем историческом развитии

4.1. Математическое, эстетическое и художественное понимание гармонии

Как упоминалось выше, при создании своей науки математики пренебрегли «проблемой гармонии» и всеми математическими результатами, связанными с этой проблемой. Тем не менее эта проблема оказалась весьма «живучей». Она по праву оносится к разряду «вечных проблем» науки, «которые постоянно держит в поле зрения исследовательская мысль» (Эдуард Сороко [82]). Как подчеркивает В.П. Шестаков в своей замечательной книге „Гармония как эстетическая категория” [88], „в истории эстетических учений выдвигались самые разнообразные типы понимания гармонии. Само понятие „гармония” употреблялось чрезвычайно широко и многозначно. Оно обозначало и закономерное устройство природы и космоса, и красоту физического и нравственного мира человека и принципы строения художественного произведения, и закономерности эстетического восприятия”.

Шестаков выделяет три основных понимания гармонии, сложившихся в процессе развития науки и эстетики:

(1) *Математическое понимание гармонии* или *математическая гармония*. В этом смысле гармония понимается как равенство или соразмерность частей с друг другом и части с целым. В Большой Советской Энциклопедии мы находим следующее определение гармонии, которое выражает математическое понимание гармонии:

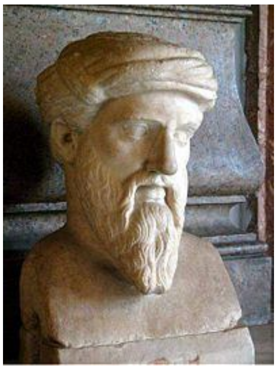
«Гармония – соразмерность частей и целого, слияние различных компонентов объекта в единое органическое целое. В гармонии получают внешнее выявление внутренняя упорядоченность и мера бытия».

(2) *Эстетическая гармония*. В отличие от математического понимания эстетическое понимание является уже не просто количественным, а качественным, выражающим внутреннюю природу вещей. Эстетическая гармония связана с эстетическими переживаниями, с эстетической оценкой. Наиболее четко этот тип гармонии проявляется при восприятии красоты природы.

(3) *Художественная гармония*. Этот тип гармонии связан с искусством. Художественная гармония – это актуализация принципа гармонии в материале самого искусства.

4.2. Числовая гармония пифагорейцев

Пифагорейцы впервые выдвинули мысль о гармоническом устройстве всего мира, включая сюда не только природу и человека, но и весь космос. Согласно пифагорейцам, «гармония представляет собою внутреннюю связь вещей, без которой космос не смог бы существовать». Наконец, согласно Пифагору гармония имеет численное выражение, то есть, она интегрально связана с концепцией числа. Пифагорейцы создали учение о созидательной сущности числа. Аристотель в «Метафизике» отмечет именно эту особенность пифагорейского учения: «Так называемые пифагорейцы, занявшись математическим науками, впервые двинули их вперед и, воспитавшись на них, стали считать их началами всех вещей ... Так как, следовательно, все остальное явным образом уподоблялось числам по всему своему существу, а числа занимали первое место во всей природе, элементы чисел они предположили элементами всех вещей и всю вселенную [признали] гармонией и числом».



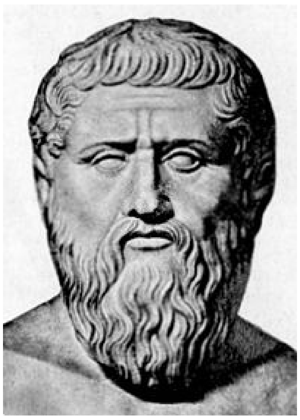
Бюст Пифагора в Капитолийском Музее (Рим)

Пифагорейцы признавали, что форма мира должна быть гармонической, а все элементы мироздания («стихии») связаны с гармоническими фигурами. Пифагор учил, что из куба возникла земля, из пирамиды (тетраэдра) – огонь, из октаэдра – воздух, из икосаэдра – вода, из додекаэдра – сфера вселенной (то есть эфир).

С таким представлением о гармонии связано и знаменитое пифагорейское учение о «гармонии сфер». Пифагор и его последователи считали, что движение светил вокруг центрального мирового огня создает чудесную музыку, воспринимаемую не слухом, а разумом. **Учение о «гармонии сфер», о единстве микро- и макрокосмоса, учение о пропорциях – все эти идеи и составляют основу пифагорейского учения.**

Главный вывод, который вытекает из пифагорейского учения, состоит в том, что **гармония объективна, она существует независимо от нашего сознания и выражается в гармоничном устройстве всего сущего, начиная с космоса и заканчивая микромиром. Но если Гармония объективна, она должна стать предметом математического исследования.**

Пифагорейское учение о числовой гармонии мироздания оказало огромное влияние на развитие всех последующих учений о природе и сущности гармонии и получило отражение и развитие в работах великих мыслителей, в частности, оно лежит в основе *Космологии Платона*. В своих работах Платон развивает пифагорейское учение, особенно подчеркивая космическое значение гармонии. Он твердо убежден в том, что мировую гармонию можно выразить в числовых пропорциях. Влияние пифагорейцев особенно прослеживается в «Тимее», где Платон вслед за пифагорейцами развивает учение о пропорциях и анализирует роль правильных многогранников («Платоновых тел»), из которых, по его мнению, Бог создал мир.



Платон (428/427 – 348/347 ВС

Главный вывод, который вытекает из пифагорейского учения, состоит в том, что **гармония объективна, она существует независимо от нашего сознания и выражается в гармоничном устройстве всего сущего, начиная с космоса и заканчивая микромиром.**

4.3. Последователи Пифагора и Платона

Птоломей. Клавдий Птоломей рассматривает гармонию как логическое начало, которое является предпосылкой простоты, всеобщности и порядка. По его мнению, к изучению гармонии следует подходить не с помощью слуха, а с помощью науки и прежде всего математики.

Витрувий. Знаменитый античный архитектор Витрувий внес огромный вклад в теорию гармонии и пропорциональности. Он рассматривает гармонию, прежде всего, как *соразмерность.* Она определятся Витрувием следующим образом: «Соразмерность есть стройная гармония отдельных членов самого сооружения и соответствие отдельных частей и всего целого одной определенной части, принятой за исходную. Как в человеческом теле эвритмия получается благодаря соразмерности между локтем, ступней, ладонью, пальцем и прочими его частями, так это бывает и в совершенных сооружениях».

Августин. В средние века пифагорейское учение получает дальнейшее развитие в сочинениях одного из видных «отцов церкви» Аврелия Августина (354-430). Согласно Августину всякая красота основана на пропорции и соответствии. Предметы прекрасны, когда «части их взаимно друг другу подобны и благодаря своему соединению составляют гармонию». Однако все эти части соотносятся друг к другу не произвольно, они основаны на порядке, числе и единстве. Согласно Августину, именно *число* есть основа красоты, которую мы воспринимаем посредством слуха и зрения.

Боэций. Средневековое представление о гармонии получило наибольшее отражение в трактатах, посвященных музыке. В средние века сам термин «музыка» означал нечто иное, чем в наше время. Он обозначал, прежде всего, одну из теоретических дисциплин в системе средневекового образования, которая стояла в одном ряду с арифметикой, астрономией и геометрией. Предметом этой дисциплины были не столько музыкальное искусство, сколько те математические пропорции и соотношения, которые лежат в основе музыки. В средние века считалось, что законы мира являются в своей основе музыкальными законами. Наиболее ярким представителем подобной точки зрения является средневековый философ Боэций (480-525). Начиная с Боэция, в эстетику средневековья прочно вошло учение о трех видах музыки: *мировой* (mundana), *человеческой* (humana) и *инструментальной* (instrumentalis). Фактически в представлении о мировой музыке Боэций реализовал идеи пифагорейского учения о мировой гармонии. В современной науке подобные идеи развиваются в работах российского исследователя доктора философских наук, профессора Александра Волошинова, написавшего прекрасную книгу на эту тему «Математика и искусство» [89].

Эпоха Возрождения. В эпоху Возрождения, начиная с 15 в., формируется новое понимание мира и личности человека, который ставится в центр мироздания («гармонический человек»). В трудах великих гуманистов этой эпохи *Джованни пико дела Мирандоллы* (1463-1494), *Леона Батиста Альберти* (1404–1472) учение о гармонии получает дальнейшее развитие. Широко известно следующее высказывание Альберти о гармонии:

«Есть нечто большее, слагающееся из сочетания и связи трех вещей (числа, ограничения и размещения), нечто, чем чудесно озаряется весь лик красоты. Это мы называем гармонией, которая, без сомнения, источник всякой прелести и красоты. Ведь назначение и цель гармонии – упорядочить части, вообще говоря, различные по природе, неким совершенным соотношением так, чтобы они одна другой соответствовали, создавая красоту … И не столько во всем теле в целом или в его частях живет гармония, сколько в самой себе и в совей природе, так что я назвал бы ее сопричастницей души и разума. И есть для нее обширнейшее поле, где она может проявиться и расцвести: она охватывает всю жизнь человеческую, пронизывает всю природу вещей. Ибо все, что производит природа, все это соизмеряется законом гармонии. И нет у природы большей заботы, чем та, чтобы произведенное ею было совершенным. Этого никак не достичь без гармонии, ибо без нее распадается высшее согласие частей».

Анализируя это высказывание Альберти, Шестаков выделяет ряд важных моментов в этом высказывании. Самым главным из них является следующее [88]:

«Гармония является законом не только искусства, но и природы, она охватывает всю жизнь человека и всю природу вещей. Гармония в искусстве является отражением гармонии в природе. Наилучшей моделью для нее является гармония частей живого организма, которая лучше всего воплощает в себе согласие и соответствие частей».

Леонардо да Винчи и Лука Пачоли. В эпоху Возрождения продолжаются поиски «совершенной пропорции». В работах Леонардо да Винчи и Дюрера учение о пропорциях сводится к поискам идеальной меры человеческого тела («Витрувийский человек» Леонардо да Винчи). В этот период возрождается интерес к «золотому сечению», и, как утверждает Эдуард Сороко [82], Леонардо да Винчи вводит это название в широкое употребление. Под непосредственным влиянием Леонардо в эпоху Возрождения публикуется первое сочинение, посвященное исключительно «золотому сечению». Речь идет о трактате известного итальянского математика Луки Пачоли «De Divine Proportione" («Божественная пропорция»). В своей книге Пачоли, апеллируя к «Государству», «Законам», «Тимею» Платона, последовательно выводит 12 (!) различных свойств Золотого Сечения. Характеризуя эти свойства, Пачоли пользуется весьма сильными эпитетами: «исключительное», «превосходнейшее», «замечательное», «почти сверхъестественное» и т.п. Раскрывая данную пропорцию в качестве универсального отношения, выражающего и в природе и в искусстве совершенство красоты, он называет ее «божественной» и склонен рассматривать ее как «орудие мышления», «эстетический канон», «как принцип мира и природы».

Пачоли не случайно вводит в название своего трактата термин «божественный». Книга «Божественная пропорция» является одним из первых математических сочинений, в котором христианская доктрина о Боге как творце Вселенной получает научное обоснование.

Картина Якопо де Барбари «Лука Пачоли»

«Гармония Мира» Иоганна Кеплера. Среди крупных ученых 17-го столетия, уделявших много внимания проблемам гармонии, прежде всего, необходимо выделить гениального астронома Иоганна Кеплера (1571-1630).

Иоганн Кеплер (1571-1630)

Наибольшую популярность приобрел его трактат «Гармония мира» (1619). В этом сочинении Кеплер дает яркую картину гармонического устройства Вселенной. Как подчеркивает Шестаков [88], «основная идея трактата Кеплера состоит в том, что гармония представляет собой универсальный мировой закон. Она придает целостность и закономерность устройства Вселенной. Этому закону подчинено все – и музыка, и свет звезд, и познание, и движение планет».

Пифагорейское учение о «музыке сфер» получает у Кеплера дальнейшее развитие Согласно Кеплеру, шесть планет, вращающихся вокруг Солнца, образуют между собой отношения, которые выражаются гармонической пропорцией. Каждая планета соответствует определенному музыкальному ладу и определенным тембрам голоса. Так, Сатурн и Юпитер, по его мнению, обладают свойством баса, Марс – тенора, Земля и Венера – альта, Меркурий – дисканта.

Уместно также вспомнить хорошо известное высказывание Кеплера, имеющее прямое отношение к «золотому сечению»:

«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».

Высказывание Кеплера поднимает «золотое сечение» на уровень «Теоремы Пифагора» - одной из важнейших теорем геометрии. И об этом не следует забывать создателям школьных учебников по геометрии. В результате одностороннего подхода к математическому образованию каждый школьник знает «Теорему Пифагора», но имеет весьма смутное представление о «золотом сечении» - втором «сокровище геометрии». Большинство школьных учебников по геометрии восходят к «Началам» Евклида. Но тогда почему в большинстве из них отсутствует упоминание о «золотом сечении», которое впервые описано именно в «Началах» Евклида?

Многие математики рассматривают сравнение «Теоремы Пифагора» с «золотым сечением» весьма большим преувеличением для «золотого сечения». Однако, при этом не следует забывать, что Кеплер был не только гениальным астрономом, но (в отличие о тех математиков, которые его критикуют) также великим физиком и математиком. Поэтому к высказыванию Кеплера необходимо относиться как к высказыванию «пророческого» значения для «золотого сечения». Именно Кеплер одним из первых понял значение «золотого сечения» в развитии науки и математики!

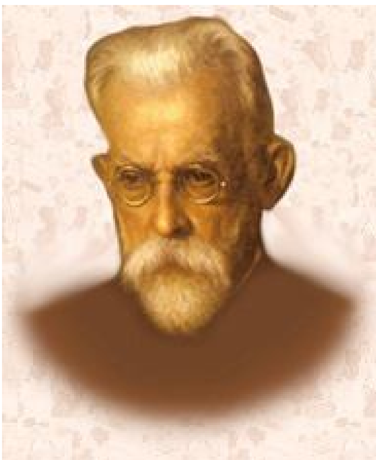
Учение Лейбница о «предустановленной гармонии». Лейбницу принадлежит знаменитое учение о «предустановленной гармонии», которое было частью его философской системы и имело теологическую окраску. Лейбниц рассматривает гармонию как универсальный закон связи и красоты Вселенной. Лейбниц представлял гармонию, как некоторое состояние, предопределенное Богом. Свое отношение к гармонии он выразил в следующих словах: «Преднамеренное устроение планет и животных более чем что-либо подтверждает мою систему предустановленной гармонии». Этой же точки зрения придерживался и великий Ньютон. Как пишет известный физик Л. Розенфельд, Ньютон свято верил в то, что **«регулярность явлений природы не может быть делом случая, в ней проявляется наличие верховной мудрости и верховного интеллекта, которые все задумали в соответствии со своим назначением и великой гармонии всего творения».**

«Мировая гармония» Шефтсбери. Одна из грандиозных космологических концепций гармонии принадлежит английскому философу и эстетику Шефтсбери (1671-1713). Согласно Шефтсбери, «гармония царит во всем мире, она является упорядочивающим и творческим началом всей природы и космоса». Одним из центральных понятий философии и эстетики Шефтсбери является понятие *целого,* оно означает универсальную связь и единство явлений и вещей. **Вся природа – это целесообразно и гармонично устроенное целое. И в природе и в искусстве отдельные вещи и явления существуют как часть целого, как момент в общей системе красоты и гармонии.**

Учение Гегеля о гармонии и мере. В работах великого немецкого философа Гегеля (1770 - 1831) содержится подробное систематическое учение о гармонии. Он развивает математическое представление о гармонии, рассматривая ее в системе других эстетических категорий, таких, как *правильность, симметрия, закономерность.*

Павел Александрович Флоренский (1882-1937). В 20-х годах Флоренский пишет работу «У водоразделов мысли», третья глава которой посвящена Золотому Сечению. Вот ее краткий набросок: «Форма и организация (Понятие формы. Целое. Divins sectio. Золотое сечение. Целое во времени. Организация времени. Циклы развития. Signatura rerum. Формула формы). **По существу в работах Флоренского впервые поставлен вопрос о рассмотрении золотого сечения как структурного инварианта природных систем.** Ставилась задача вывести состояния устойчивости целого, находящегося в поле действия противоположно ориентированных сил.

«Учение о ноосфере» В.И. Вернадского. По широте научного кругозора и разнообразию научных открытий Владимир Иванович Вернадский стоит, пожалуй, особняком среди других великих естествоиспытателей 20-го столетия.



Владимир Вернадский (1863-1945)

Молекулярные кристаллические структуры, планетарные геохимические оболочки, история минералов и геосфер, движение химических элементов Земли, геологическая роль "живого вещества" в истории планеты, учение о ноосфере - таков в кратком перечислении круг научных интересов ученого-мыслителя, идеи которого приобретают со временем все большую актуальность. За последние сто лет науки преимущественно обособлялись, дробились, рождались. Вернадский, как мы знаем, не считался с границами отдельных наук, объединял различные области знания (геохимию с биологией, геологию с экономикой, историю науки с естествознанием и т. д.). Проводя специальные научные исследования, он был в то же время философом, историком, организатором науки, касался проблем морали, человеческой личности, свободы и справедливости. Как подчеркивает Олег Боднар в своей статье [90], «сравнительно недавно – в начале XX столетия, В.И.Вернадским была выдвинута великая идея – идея **ноосферы**. Ее глубина и важность начинает осознаваться только сегодня, когда человечество стало ощущать опасность глобальной катастрофы. И это не преувеличение. Идея философии ноосферы, предложенная В.И.Вернадским, не что иное, как идея нового мировоззрения, лишь поворот к которой в начале XXI века даст человечеству шанс на продолжение жизни, развитие ее в направлении разумного взаимодействия с природой. Идея гармонии, по мнению современных апологетов философии ноосферы – центральная идея нового мировоззрения. Таков реальный контекст обсуждаемого в нашей статье предложения о внедрении теории гармонии в систему образования, понимаемого нами как конкретный шаг на пути "движения к ноосфере".

4.4. Общий подход к математическому анализу понятия «Гармония»

Как известно, математика изучает количественные аспекты того или иного явления. И начиная математический анализ понятия гармонии, мы должны сконцентрировать наше внимание на количественных аспектах этого понятия. Что такое гармония с количественной точки зрения?

Важный аспект исследования гармонии с математической точки зрения связан с проблемой *симметрии.* Как подчеркивает Шестаков [88], «исследование симметрии в современном значении этого понятия давно вышло за пределы собственно эстетики. Эта проблема изучается в современной физике, химии, математике, кристаллографии». В этой связи было выдвинуто ряд новых концептуальных подходов к изучению принципа симметрии. Главная идея таких подходов состоит в том, что именно законы симметрии являются отражением законов гармонии в природе. В статье «Гармония в природе и искусстве» [91] Шубников определяет гармонию как порядок, сравнивая ее с тем порядком, который исследует наука, открывая и познавая законы природы. «Закон, гармония, порядок лежат в основе не только научной работы, но и всякого художественного произведения».

Другое направление исследования математической гармонии связано с пониманием гармонии как *пропорции.* По существу понятие «симметрии» тесно связано с понятием «пропорции», поскольку «симметрия» как раз и означает соразмерность частей какого-либо целого как в отношении между собой, так и в соотношении с целым.

В настоящей статье мы акцентируем основное внимание на *математической гармонии.* Ясно, что математическое понимание гармонии принимает, как правило, математический вид и выражается в виде определенных числовых пропорций. Как подчеркивает Шестаков [88], математическая гармония **«фиксирует внимание на количественной стороне дела и безразлична к качественному своеобразию частей, вступающих в гармоническое соответствие ... Математическое понимание гармонии фиксирует, прежде всего, количественную определенность гармонии, но оно не заключает в себе представления об эстетическом качестве гармонии, о ее выразительности, связи с красотой».** Это высказывание Шестакова является «ключевым» с точки зрения создания «Математической теории гармонии» или «Математики Гармонии», предпринятой автором в работах [14, 30, 34, 36, 38, 44, 51, 52, 56, 63, 64].

Как упоминалось, существуют различные определения понятия «Гармония». Однако, большинство из них сводятся к приведенному выше определению, взятому из Большой Советской Энциклопедии (см. выше).

Начнем с выяснения исходного значения слова «Гармония». Как известно, слово «Гармония» имеет греческое происхождение. При этом греческое слово *αρμονια* означает *связь, согласие*. Анализ значения слова «Гармония» и его определения показывает, что наиболее важными, «ключевыми» понятиями, которые лежат в основе этого понятия, являются следующие: *связь, согласие, комбинация, упорядоченность.*

Возникает вопрос: какой раздел математики изучает подобные понятия? Поиски ответа на этот вопрос приводят нас к *комбинаторному анализу*. Как подчеркивается в [92], «комбинаторика занимается различного вида сочетаниями (соединениями), которые можно образовать из элементов некоторого конечного множества. Термин «комбинаторика» происходит от латинского слова combinary – сочетать, соединять».

Из этого рассмотрения вытекает, что латинское слово *combinary* и греческое слово *αρμονια* имеют близкие значения и могут быть переведены как *комбинация* или *соединение.* Это дает нам право выдвинуть гипотезу, что именно **«Законы комбинаторного анализа» могут быть использованы для создания «математической теории гармонии».**

5. Новый взгляд на историю возникновения математики с точки зрения «проблемы гармонии»

В работах [56, 78] автором развит новый взгляд на историю математики. Суть подхода состоит в том, чтобы к упоминавшимся выше двум «ключевым» проблемам математики на этапе ее зарождения – **«проблеме счета»** и **«проблеме измерения»,** которые лежат у истоков возникновения «классической математики» [83], добавить еще одну «ключевую» проблему – **«проблему Гармонии»,** связанную с «золотым сечением» - одним из важнейших математических открытий античной математики (Теорема 2.11 «Начал» Евклида). Согласно этому подходу, на раннем этапе в математике было сделано ряд важных математических открытий, которые фундаментально повлияли на развитие математики и всей науки в целом. Важнейшими из них являются:

(1) **Позиционный принцип представления чисел,** сделанный вавилонскими математиками во 2-м тысячелетии до н.э. и воплощенный ими в Вавилонской 60-ричной системе счисления. Это важное математическое открытие лежит в основе всех последующих позиционных систем счисления, в частности, десятичной системы и двоичной системы - основы современных компьютеров. Это открытие, в конечном итоге, привело к формированию понятия **натурального числа –** важнейшего понятия, лежащего в основе математики.

(2) **Несоизмеримые отрезки.** Это открытие, сделанное в научной школе Пифагора, привело к переосмысливанию ранней пифагорейской математики, в основе которой лежал «принцип соизмеримости величин», и к открытию **иррациональных чисел** – второго (после натуральных чисел) важнейшего понятия математики. В конечном итоге, эти два понятия (натуральные и иррациональные числа) и лежат в основе «классической математики».

(3) **«Золотое Сечение».** Впервые описание этого открытия дано в «Началах» Евклида в Теореме 2.11 о «делении геометрического отрезка в крайнем и среднем отношении». Эта теорема была введена Евклидом с целью создания строгой геометрической теории «Платоновых тел» (в частности, додекаэдра), изложению которых посвящена заключительная (13-я) книга «Начал» Евклида. Как известно, «золотое сечение» стало своеобразным каноном древнегреческого искусства и затем широко использовалось в искусстве Возрождения, а также в искусстве 19-го и 20-го столетий. «Математическая теория золотого сечения» получила дальнейшее развитие в работах французских математиков 19-го века Бине («формулы Бине») и Люка («числа Люка»). Во второй половине 20-го века эта теория получила развитие в работах советского математика Николая Воробьева [93] и американского математика Вернера Хогатта [94]. Развитие этого направления, в конечном итоге, привело к возникновению «Математики Гармонии» [14, 30, 34,

36, 38, 44, 51, 52, 56, 63, 64] - нового междисциплинарного направления современной науки, которое имеет отношение к современной математике, теоретической физике и компьютерной науке. Такой подход приводит к выводу, который может оказаться неожиданным для многих математиков. Оказывается, что **параллельно с «классической математикой» в науке, начиная с древних греков, развивалась еще одно математическое направление – «Математика Гармонии», которая, как и классическая математика, восходит к «Началам» Евклида, но акцентирует свое внимание не на «аксиоматическом подходе», а на геометрической «задаче о делении в крайнем и среднем отношении» (Теорема 2.11) и на теории правильных многогранников, изложенной в 13-й книге «Начал» Евклида.**

«Ключевые» проблемы античной математики и новые направления в математике, теоретической физике и информатике

6. Математика Гармонии: новые научные результаты

6.1. Обобщенные *p*-числа Фибоначчи и *p*-числа Люка. В последние десятилетия многими авторами независимо друг от друга получены обобщения классических чисел Фибоначчи, чисел Люка и «золотой пропорции». Первое из них – это обобщенные p-числа Фибоначчи [2], которые при заданном целом p=0, 1, 2, 3, ... задаются следующим рекуррентным соотношением:

$$F_p(n) = F_p(n\text{-}1) + F_p(n\text{-}p\text{-}1). \quad (7)$$

При начальных условиях

$$F_p(0) = 0;\ F_p(1) = F_p(2) = ... = F_p(p) = 1 \quad (8)$$

данное рекуррентное соотношение генерирует бесконечное число новых рекуррентных числовых последовательностей, частными случаями которых являются «двоичный ряд чисел» 1, 2, 4, 8, 16, ... (p=0) и ряд Фибоначчи (p=1).

Существенно подчеркнуть, что рекуррентное соотношение для p-чисел Фибоначчи выражает глубокие математические свойства «Треугольника Паскаля» (диагональные суммы Треугольника Паскаля) и выражается через биномиальные коэффициенты с помощью следующей изящной формулы [2]:

$$F_1(n) = C_n^{\ 0} + C_{n\text{-}p}^{\ 1} + C_{n\text{-}2p}^{\ 2} + C_{n\text{-}3p}^{\ 3} + C_{n\text{-}4p}^{\ 4} + ... \quad (9)$$

В работе [49] введены обобщенные p-числа Люка $L_p(n)$, которые при заданном p=0, 1, 2, 3, ... задаются следующим рекуррентным соотношением:

$$L_p(n) = L_p(n\text{-}1) + L_p(n\text{-}p\text{-}1). \quad (10)$$

При начальных условиях

$$L_p(0) = p+1;\ L_p(1) = L_p(2) = ... = L_p(p) = 1 \quad (11)$$

данное рекуррентное соотношение генерирует бесконечное число новых рекуррентных числовых последовательностей, частным случаем которого является ряд Люка (p=1).

6.2. Обобщение задачи о «золотом сечении». В книге [2] приведено следующее обобщение задачи о «золотом сечении». Зададимся целым неотрицательным числом p=0, 1, 2, 3, ... и разделим отрезок AB точкой C на две части CB и AC такие, что $CB \geq AC$, в такой пропорции, чтобы

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p . \quad (12)$$

Заметим, что при p=0 $CB = AC$ и деление отрезка в пропорции (12) совпадает с «дихотомией» (деление пополам). При p=1 деление отрезка в пропорции (12) есть ни что иное, как «деление в крайнем и среднем отношении» («золотое сечение»), описанное в «Началах» Евклида. На этом основании деление отрезка в пропорции (12) названо в [2] *обобщенным золотым сечением* или просто *золотым р-сечением.*

Если теперь обозначить $\frac{AB}{CB} = x$ и учесть, что $AB = AC + CB,$ то отношение $\frac{AB}{CB} = x$ можно представить в виде:

$$x = \frac{AC + CB}{CB} = 1 + \frac{1}{\frac{CB}{AC}} \quad (13)$$

Учитывая введенное выше обозначение $\frac{AB}{CB} = x$ и пропорцию (12), выражение (13) можно записать в виде:

$$x = 1 + \frac{1}{x^p},$$

откуда непосредственно вытекает следующее алгебраическое уравнение:

$$x^{p+1} - x^p - 1 = 0. \quad (14)$$

Заметим, что при p=1 уравнение (13) сводится к уравнению «золотого сечения» (3).

Положительный корень уравнения (13) был назван в [2] *золотой р-пропорцией* Φ_p. Непосредственно из уравнения (13) вытекает следующее свойство золотой p-пропорции [2]:

$$\Phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \Phi_p^{n-p-1} = \Phi_p \times \Phi_p^{n-1}, \quad (14)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

Это означает, что степени золотой *p*-пропорции связаны друг с другом как «свойством мультипликативности» ($\Phi_p^n = \Phi_p \times \Phi_p^{n-1}$), так и «свойством аддитивности» ($\Phi_p^n = \Phi_p^{n-1} + \Phi_p^{n-p-1}$).

В работе [49] выведены обощенные формулы Бине, которые позволяют выразить обобщенные *p*-числа Фибоначчи и *p*-числа Люка через корни алгебраического уравнения (14).

Чтобы оценить «физический смысл» уравнения (14) и «золотых *p*-пропорций», задаваемых (15), обратимся к *p*-числам Фибоначчи. В книге [2] доказано, что *p*-числа Фибоначчи могут быть получены с «Треугольника Паскаля», который является едва ли не главным математическим объектом комбинаторного анализа. Оказывается, что *p*-числа Фибоначчи выражают так называемые «диагональные суммы» треугольника Паскаля, что выражается с помощью формулы (9). С другой стороны, в книге [2] найден предел, к которому стремится отношение соседних *p*-чисел Фибоначчи при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = \Phi_p. \qquad (15)$$

А это означает, что золотые *p*-пропорции Φ_p (*p*=0, 1, 2, 3, ...) задают новый класс математических констант, которые выражают глубокие математические свойства «Треугольника Паскаля» и, следовательно, всего комбинаторного анализа. Учитывая ту роль, которую комбинаторный анализ играет в физике (в частности, в статистической физике) мы можем предсказать, что золотые *p*-пропорции могут быть обнаружены во многих физических явлениях.

Но наиболее далеко в оценке значения золотых *p*-пропорций для развития современной науки пошел белорусский философ Эдуард Сороко. Изучая процессы самоорганизации систем различной природы, он сформулировал новый закон природы, названный им «Законом структурной гармонии систем» [82]:

«Обобщенные золотые сечения суть инварианты, на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоничное строение, стационарный режим существования, структурно-функциональную ... устойчивость».

6.3. Новый подход к геометрическому определению числа. В основе классической теории чисел лежит следующее определение понятия натурального числа, основанное на геометрическом подходе и изложенное в «Началах Евклида». Пусть

$$S = \{1, 1, 1, \ldots\} \qquad (16)$$

представляет собой бесконечное множество геометрических отрезков, называемых «*монадами*» или *единицами*. Тогда согласно Евклиду натуральное число *N* определяется следующим образом:

$$N = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 \ (N \text{ раз}). \qquad (17)$$

Несмотря на предельную простоту такого определения, оно сыграло огромную роль в развитии теории чисел и лежит в основе многих полезных математических понятий, в частности, понятий *простого* и *составного* числа, *умножения, деления*, а также понятий *делимости* и *сравнения,* которые являются одними из основных понятий элементарной теории чисел, то есть определение (7) «порождает» как натуральные числа, так и всю проблематику их теории.

В течение многих тысячелетий математики развивали и уточняли понятие числа. В 17-м веке в период зарождения современной науки и математики разрабатывается ряд методов изучения непрерывных процессов, и понятие действительного числа вновь выходит на передний план. Наиболее отчетливо новое определение этого понятия дается одним из основоположников математического анализа И. Ньютоном в его «Всеобщей Арифметике»:

«Под числами мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу».

Эта формулировка дает нам единое определение действительного числа, рационального или иррационального. Если теперь рассмотреть «Евклидово определение числа» (17) с точки зрения «определения Ньютона», то в качестве «другой величины того же рода, принятой за единицу», выступает «монада».

С точки зрения «определения Ньютона» систему Бергмана (6) можно также рассматривать как новое определение действительного числа, в котором в качестве «монады» выступает «золотая пропорция» (основание системы счисления). Дальнейшее развитие эта идея получила в работе [35], в которой изучается новое определение действительного числа, основанного на понятии «золотой p-пропорции»:

$$A = \sum_i a_i \Phi_p^i, \tag{18}$$

где Φ_p – золотая p-пропорция, $a_i \in \{0, 1\}$ и $i = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

Выражение (18) «генерирует» бесконечное количество позиционных способов представления чисел (систем счисления), так как каждому p (p=0, 1, 2, 3, …) соответствует своя система счисления типа (18). Основанием системы счисления (18) является «золотая p-пропорция» Φ_p. Заметим также, что при p=0 Φ_p=2 и позиционное представление (18) сводится к классической двоичной системе счисления, лежащей в основе современных компьютеров. При p>0 все основания Φ_p являются иррациональными числами, то есть выражение (18) порождает новый класс позиционных систем счислений – *системы счисления с иррациональными основаниями.* В частности при p=1 основание $\Phi_p = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и, следовательно, позиционное представление (18) сводится к системе Бергмана (6). Заметим, что выражение (18) впервые было введено автором еще в 1980 г. [24] и названо *«кодом золотой p-пропорции».* Теория этих систем счисления изложена в книге автора [4].

6.4. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка. Открытие глубокой математической связи между гиперболическими функциями и числами Фибоначчи и Люка можно считать одним из важнейших математических достижений современной «теории чисел Фибоначчи». Независимо друг от друга к этой идее подошли украинский архитектор Олег Боднар [85] и украинские математики А.П. Стахов и И.С. Ткаченко [31]. Строгая математическая теория гиперболических функций Фибоначчи и Люка впервые изложена в статье Стахова и Ткаченко [31] и в книгах А.П. Стахова [11, 12]. Дальнейшее развитие эта теория получила в работах Стахова и Розина [39, 40, 46, 55]. Рассмотрим так называемые симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка, введенные в статье [46]:

Симметричный гиперболический синус и косинус Фибоначчи

$$sFs(x) = \frac{\Phi^x - \Phi^{-x}}{\sqrt{5}}; \qquad cFs(x) = \frac{\Phi^x + \Phi^{-x}}{\sqrt{5}} \tag{19}$$

Симметричный гиперболический синус и косинус Люка

$$sLs(x) = \Phi^x - \Phi^{-x}; \qquad cLs(x) = \Phi^x + \Phi^{-x} \tag{20}$$

где $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Числа Фибоначчи и Люка однозначно определяются через симметричные фибоначчиевые синусы и косинусы следующим образом:

$$F(n) = \begin{cases} sFs(n) & при \quad n=2k \\ cFs(n) & при \quad n=2k+1 \end{cases}; \qquad L(n) = \begin{cases} cLs(n) & при \quad n=2k \\ sLs(n) & при \quad n=2k+1 \end{cases} \tag{21}$$

Эти соотношения показывают, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка отличаются от классических гиперболических функций той особенностью, что они имеют «дискретный» аналог в виде последовательностей Фибоначчи и Люка, которые как бы вписываются в графики гиперболических функций Фибоначчи и Люка в «дискретных» точках 0, ±1, ±2, ±3, ... Самое важное состоит в том, что любое «непрерывное» тождество для гиперболических функций Фибоначчи и Люка автоматически превращается в соответствующее «дискретное» тождество для чисел Фибоначчи путем простой подстановки $x=k$, где k = 0, ±1, ±2, ±3, ... Это означает, что «дискретная» до сих пор «теория чисел Фибоначчи» [93, 94] как бы «вырождается», так как она заменяется более общей, «непрерывной» теорией гиперболических функций Фибоначчи и Люка [11, 12, 31, 39, 40, 46, 55]. А это, в свою очередь, означает, что математикам-фибоначчистам надо «сушить весла» и искать другое приложение своих талантов, так как созданная ими «теория чисел Фибоначчи» просто становится частным случаем более общей «теории гиперболических функций Фибоначчи и Люка». А если говорить серьезно, то введение гиперболических функций Фибоначчи и Люка переводит «теорию чисел Фибоначчи» на новый уровень развития.

А теперь о практической применимости гиперболических функций Фибоначчи и Люка. Блестящий ответ на этот вопрос дал украинский исследователь Олег Боднар. В книге [85] он разработал новую геометрическую теорию филлотаксиса («геометрию Боднара»), основанную на гиперболических функциях Фибоначчи и Люка. Тем самым Боднар показал, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка являются «естественными» функциями живой природы, то есть, эти функции не являются выдумкой Боднара, Стахова, Ткаченко и Розина. Они относятся к разряду «фундаментальных» идей природы, потому как, согласно высказыванию Фурье, они **«отражают явления природы».**

6.5. Обобщенные *m*-числа Фибоначчи и формулы Газале. В конце 20-го века сразу несколько исследователей из разных стран (Вера Шпинадель [95], Мидхат Газале [96], Джей Капрафф [97], Александр Татаренко и другие) обратили внимание на следующее обобщение рекуррентного соотношения Фибоначчи:

$$F_m(n+2) = mF_m(n+1) + F_m(n),\ F_m(0) = 0 \text{ и } F_m(1) = 1, \tag{22}$$

где $m>0$ – положительное действительное число.

Заметим, что рекуррентное соотношение (22) порождает бесконечное число новых рекуррентных числовых рядов, так как каждому m соответствует свой числовой ряд. В частности, при $m=1$ формула (22) порождает классический ряд Фибоначчи, а при $m=1$ - *ряд Пелли*: 0, 1, 2, 5, 12, 29, ...

Рекуррентное соотношение (22) приводит к следующему обобщению «уравнения золотой пропорции»:

$$x^2 - mx - 1 = 0. \tag{23}$$

Положительный корень указанного выше квадратного уравнения порождает бесконечное число новых «гармонических» пропорций – «золотых m-пропорций», которые выражаются следующей изящной формулой:

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{4+m^2}+m}{2}. \qquad (24)$$

Заметим, что при m=1 эта формула задает классическую «золотую пропорцию» $F = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

«Золотые m-пропорции” обладают следующими математическими свойствами:

$$\Phi_m = \sqrt{1+m\sqrt{1+m\sqrt{1+m\sqrt{\ldots}}}} \qquad \Phi_m = m + \cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\ldots}}}$$

которые являются обобщениями подобных свойств для классической «золотой пропорции»:

$$\Phi_1 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots}}}} \qquad \Phi_1 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

Эти выражения подчеркивают фундаментальный характер как классической «золотой пропорции», так и обобщенной «золотой m-пропорции».

В книге [96], опубликованной в 1999 г. и переведенной на русский язык в 2002 г., египетский математик Мидхат Газале вывел следующую замечательную формулу, которая задает аналитически обобщенные числа Фибоначчи $F_m(n)$ в диапазоне значений n = 0, ±1, ±2, ±3, ... :

$$F_m(n) = \frac{\Phi_m^n - (-1)^n \Phi_m^{-n}}{\sqrt{4+m^2}} \qquad (25)$$

Следует отметить, что выведенная формула задает бесконечное количество новых рекуррентных числовых последовательностей, подобных числам Фибоначчи, так как каждому m соответствует своя числовая последовательность. Некоторые из них приведены ниже.

m	Φ_m	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	5	-3	2	-1	1	0	1	1	2	3	5
2	$1+\sqrt{2}$	29	-12	5	-2	1	0	1	2	5	12	29
3	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	109	-33	10	-3	1	0	1	3	10	33	109
4	$2+\sqrt{5}$	305	-72	17	-4	1	0	1	4	17	72	305

Заметим, что второй ряд этой таблицы (m=1) задает классические числа Фибоначчи, в то время как третий ряд (m=2) задает числа Пелли.

Эта формула по праву может быть отнесена к разряду выдающихся математических формул наряду с формулами Эйлера, формулами Муавра, формулами Бине и т.д. В статье [75] автор назвал эту формулу *формулой Газале*. В этой же статье автор вывел «формулу Газале» для m-чисел Люка:

$$L_m(n) = \Phi_m^n + (-1)^n \Phi_m^{-n}. \qquad (26)$$

Заметим, что эта формула задает бесконечное количество новых рекуррентных последовательностей, частными случаями которых являются классические *числа Люка* (m=1) и *числа Пелли-Люка* (m=2). Некоторые из этих числовых последовательностей приведены в таблице ниже:

m	Φ_m	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	-11	7	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11
2	$1+\sqrt{2}$	-82	34	-14	6	-2	2	2	6	14	34	82
3	$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$	-393	119	-36	11	-3	2	3	11	36	119	393
4	$2+\sqrt{5}$	-1364	322	-76	18	-4	2	4	18	76	322	1364

6.6. Новые гиперболические модели Природы. Важным научным результатом работы [75] является разработка общей теории гиперболических функций, вытекающих из «формул Газале» (25), (26).

Гиперболический *m*-синус Фибоначчи

$$sF_m(x)=\frac{\Phi_m^x-\Phi_m^{-x}}{\sqrt{4+m^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+m^2}}\left[\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^{-x}\right] \tag{27}$$

Гиперболический *m*-косинус Фибоначчи

$$cF_m(x)=\frac{\Phi_m^x+\Phi_m^{-x}}{\sqrt{4+m^2}}=\frac{1}{\sqrt{4+m^2}}\left[\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^{-x}\right] \tag{28}$$

Гиперболический *m*-синус Люка

$$sL_m(x)=\Phi_m^x-\Phi_m^{-x}=\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^{-x} \tag{29}$$

Гиперболический *m*-косинус Люка

$$cL_m(x)=\Phi_m^x+\Phi_m^{-x}=\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^{-x} \tag{30}$$

Заметим, что эти гиперболические функции являются обобщением *симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка*, введенными Стаховым и Розиным в 2005 г. [46].

Формулы (27)-(30) задают бесконечное число новых гиперболических моделей природы, так как каждое действительное число *m* порождает свой класс гиперболических функций. Как показано в [75], все эти функции обладают, с одной стороны, “гиперболическими» свойствами, подобными свойствам классических гиперболических функций, с другой стороны, «рекуррентными» свойствами, подобными свойствам *m*-чисел Фибоначчи, задаваемых рекуррентным соотношением (22). В частности, классические гиперболические функции являются частным случаем гиперболических *m*-функций Люка и при $m_e=\frac{e}{2}-\frac{2}{e}\approx 0.623382...$ связаны с гиперболическими *m*-функциями Люка следующими простыми соотношениями:

$$sh(x)=\frac{sL_m(x)}{2} \quad \text{и} \quad ch(x)=\frac{cL_m(x)}{2}.$$

В настоящее время пока трудно оценить значение новой теории гиперболических функций для развития современной науки, но мы вполне можем наметить направление этих исследований. Можно предположить, что различным явлениям природы адекватно соответствуют гиперболические *m*-функции Фибоначчи и Люка, соответствующие различным значениям *m*. Например, геометрия филлотаксиса требует для своего описания гиперболические

m-функции Фибоначчи и Люка, соответствующие значению m=1 [85]. То есть, основанием таких гиперболических функций является классическая «золотая пропорция».

Таким образом, формулы Газале и вытекающие из них новые математические результаты в области гиперболических функций Фибоначчи и Люка и «золотых» матриц, полученные в настоящей работе, открывают интересные перспективы для создания новых гиперболических моделей Природы (теоретическая физика). **Из такого подхода вполне можно ожидать появление следующих новых научных теорий «космологического» характера: (1) *«Золотая» геометрия Лобачевского*; (2) *«Золотая» геометрия Минковского* как новая интерпретация специальной теории относительности Эйнштейна. То есть, новые гиперболические функции могут привести к пересмотру важнейших научных теорий современной науки**.

6.12. Матрицы Фибоначчи и «золотые» матрицы. Еще одним новым научным результатом, подученным автором в рамках «Математики Гармонии», является введение нового класса квадратных матриц – *матриц Фибоначчи* [33] и *«золотых» матриц* [54, 75]. В работе [33] введены так называемые *Q_p-матрицы Фибоначчи*:

$$Q_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Рассмотрим частные случаи Q_p-матрицы, соответствующие значениям p = 0, 1, 2, 3, 4:

$$Q_0 = (1)\,; \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = Q\,; \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad Q_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

А теперь сравним между собой две соседние Q_p-матрицы, например, матрицы Q_4 и Q_3. Очень просто увидеть, что, если в матрице Q_4 вычеркнуть последний, то есть 5-й столбец и предпоследнюю, т.е. 4-ю, строку, то мы получим матрицу Q_3. Оказывается, что это – общий принцип, связывающий любые две соседние Q_p-матрицы! Действительно, если в матрице Q_3 вычеркнуть последний столбец и предпоследнюю строку, то мы придем к матрице Q_2. Проделав то же самое с матрицей Q_2, то есть, вычеркнув из нее последний столбец и предпоследнюю строку, мы придем к матрице Q_1, которая представляет собой ни что иное, как классическую Q–матрицу [94], предмет восторга математиков-фибоначчистов. Таким образом, каждая Q_p-матрица содержит в себе все предыдущие матрицы и, с другой стороны, входит в качестве составной части во все всех последующие матрицы.

В работе [33] доказано, что детерминант матрицы (31) задается следующим выражением:

$$\mathrm{Det}\, Q_p = (-1)^p \ (p=0, 1, 2, 3, ...). \tag{32}$$

Если теперь возвести матрицу (31) в n-ю степень (n=0, ±1, ±2, ±3, ...), то мы получим следующий неожиданный результат [33]:

$$Q_p^n = \begin{pmatrix} F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1) \\ F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p) \end{pmatrix}. \tag{33}$$

где элементами матрицы Q_p^n являются p-числа Фибоначчи, вытекающие из треугольника Паскаля. И этот результат является еще одним «секретом» треугольника Паскаля, неизвестным до настоящего времени!

В работе [33] доказано еще одно удивительное свойство матрицы (33):

$$Det\ Q_p^n = (-1)^{pn} \ (p = 0,1,2,3,...; n = 0,\pm1,\pm2,\pm3,...)$$

В работе [75] автором введен еще один тип «матриц Фибоначчи»:

$$G_m = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Матрица (34) является порождающей матрицей для обобщенных m-чисел Фибоначчи. В работе [75] доказаны следующие свойство G_m-матрицы (34):

$$G_m^n = \begin{pmatrix} F_m(n+1) & F_m(n) \\ F_m(n) & F_m(n-1) \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$Det\ G_n^m = (-1)^n. \tag{36}$$

В работе [75] автором введен новый класс квадратных матриц, основанных на использовании гиперболических m-функций Фибоначчи:

$$G_m^{2x} = \begin{pmatrix} cF_m(2x+1) & sF_m(2x) \\ sF_m(2x) & cF_m(2x-1) \end{pmatrix} \quad G_m^{2x+1} = \begin{pmatrix} sF_m(2x+2) & cF_m(2x+1) \\ cF_m(2x+1) & sF_m(2x) \end{pmatrix} \tag{37}$$

Как вытекает из (37), элементами матриц (37) являются гиперболические m-функции Фибоначчи, задаваемые (27), (28), то есть матрицы (37) являются функциями непрерывной переменной x. Но самым неожиданным свойством матриц (37) являются следующие два тождества, которые справедливы для любого значения непрерывной переменной x:

$$\mathrm{Det}\ G_m^{2x} = 1; \ \mathrm{Det}\ G_m^{2x+1} = -1. \tag{38}$$

Таким образом, в работах [33, 54, 75] разработана новая теория квадратных матриц, обладающих исключительными математическими свойствами. Их детерминанты тождественно равны либо +1 либо -1!

7. Приложения «Математики Гармонии» в современной информатике

В этой статье нет возможности подробно осветить все оригинальные приложения «Математики Гармонии» в современной информатике. Отметим только важнейшие из них.

7.1. Алгоритмическая теория измерения [2, 3, 18, 20, 28, 43] возникла из практических задач, возникших в технике аналого-цифрового преобразования. На этой основе в Винницком политехническом институте были разработаны уникальные самокорректирующиеся аналого-цифровые и цифроаналоговые преобразователи, превышающие по своим техническим параметрам мировой уровень [9]. Однако значение алгоритмической теории измерения выходит далеко за рамки аналого-цифровых преобразователей, если учесть ту «ключевую» роль, которую «проблема измерения» сыграла в создании математики. Роль этой проблемы в развитии математики настолько велика, что это дало право болгарскому математику академику Илиеву заявить [93], что «на протяжении первой эпохи своего развития – от античности и вплоть до открытия дифференциального и интегрального исчисления – математика, исследуя в первую очередь проблемы измерения величин, создала геометрию Евклида и учение о числах». Основным результатом алгоритмической теории измерения является доказательство существования бесконечного количества новых, неизвестных ранее оптимальных алгоритмов измерения, в частности, фибоначчиевых алгоритмов измерения, основанных на p-числах Фибоначчи. Алгоритмическая теория измерения имеет прямое отношение к теории систем счисления и порождает бесконечное число новых, неизвестных ранее позиционных систем счисления, которые могут быть использованы для создания новых компьютеров – **компьютеров Фибоначчи.**

7.2. Арифметика и компьютеры Фибоначчи. В работах [17, 19, 21,23, 24, 25, 27, 28, 29] разработаны основы новой компьютерной арифметики, названой *арифметикой Фибоначчи* и выдвинут проект создания *компьютеров Фибоначчи.* Это направление вызвало большой резонанс в советской науке особенно в связи с успешным патентованием этого направления за рубежом. В июне 1989 г. это направление было заслушано на специальном заседании Президиума Академии наук Украины [29]. 65 патентов США, Японии, Англии, Франции, ФРГ, Канады и других стран подтверждают мировой приоритет украинской науки в этом важном компьютерном направлении.

7.3. Троичная зеркально-симметричная арифметика. Компьютеры могут быть построены не только на «двоичном» принципе (двоичная система счисления, Булева логика, двоичный элемент памяти), но и на «троичном» принципе (троичная система счисления, троичная логика, троичный элемент памяти). Впервые «троичный» принцип был реализован в компьютере «Сетунь», разработанном на заре компьютерной эры под руководством Николая Брусенцова в Московском университете. В работе [45] автором предложена новая компьютерная арифметика, построенная на «троичном» принципе и названная *троичной зеркально-симметричной арифметикой.* Высокая оценка новой компьютерной арифметики «компьютерным патриархом» Николаем Брусенцовым и выдающимся американским ученым Дональдом Кнутом, почетным профессором Стэнфордского университета, вселяет надежду, что проект «Троичного зеркально-симметричного компьютера» будет реализован уже в ближайшее время.

7.4. Новая теория кодирования, основанная на матрицах Фибоначчи. В работах [8, 53] разработаны основы новой теории кодирования, основанной на матрицах Фибоначчи. **Показано, что новые корректирующие коды, вытекающие из этого подхода, превышают известные корректирующие коды [99] в 1 000 000 и более раз по корректирующей способности.**

7.5. «Золотая» криптография. Все известные методы криптографии [100-102] создавались для «идеальных» условий, то есть в предположении, что «кодер» осуществляет «идеальное» преобразование исходного сообщения (“plaintext”) в зашифрованное сообщение (“ciphertext”). При этом «канал связи» также осуществляет «идеальную» передачу зашифрованного сообщения. Как известно, в реальных условиях это неосуществимо. Для ряда специальных приложений (космические и военные системы связи) проблема обеспечения надежного функционирования криптосистемы является особенно актуальной. В работах [54, 75] автором разработан новый метод криптографии, названный *«золотой» криптографией.* Метод основан на использовании «золотых» матриц (37), обладающих уникальными математическими свойствами (38). Показано, что свойства (38) могут быть использованы для обеспечения контроля процесса преобразования исходного сообщения в зашифрованное (в «кодере»), а также зашифрованного сообщения в исходное (в «декодере»), а также для контроля передачи информации в «канале связи», то есть на основе «золотой» криптографии могут быть созданы супернадежные «гибридные» криптосистемы [100, 101], в которых осуществляется защита информации не только от «хакеров», но и от «шумов», «сбоев» и «отказов» в криптосистеме.

8. Современные научные открытия, основанные на «золотом сечении»

Самыми важными индикаторами современной науки являются фундаментальные научные открытия, которые опровергают существующие представления и закладывают основу революционных преобразований в науке. Часть из них, так или иначе, связаны с «золотым сечением». Рассмотрим эти открытия.

8.1. Квазикристаллы. 12 ноября 1984 г. в небольшой статье, опубликованной в авторитетном журнале «Physical Review Letters», израильским физиком Даном Шехтманом, было предъявлено экспериментальное доказательство существования металлического сплава с исключительными свойствами. При исследовании методами электронной дифракции этот сплав проявил все признаки кристалла. Его дифракционная картина составлена из ярких и регулярно расположенных точек, совсем как у кристалла. Однако эта картина характеризуется наличием «икосаэдрической» или «пентангональной» симметрии, что строго запрещено в кристалле из геометрических соображений. Такие необычные сплавы были названы *квазикристаллами.* Менее чем за год были открыты многие другие сплавы подобного типа. Их было так много, что квазикристаллическое состояние оказалось намного более распространенным, чем это можно было бы представить

Понятие квазикристалла представляет фундаментальный интерес, потому что оно обобщает и завершает определение кристалла. Теория, основанная на этом понятии, заменяет извечную идею о «структурной единице, повторяемой в пространстве строго периодическим образом», ключевым понятием *дальнего порядка.* Как подчеркивает в статье [103] **«это понятие привело к расширению кристаллографии, вновь открытые богатства которой мы только начинаем изучать. Его значение в мире минералов можно поставить в один ряд с добавлением понятия иррациональных чисел к рациональным в математике». Важно подчеркнуть, что в основе «квазикристаллов» лежит «золотое сечение», которое является главной пропорцией икосаэдра (этот факт доказан в «Началах» Евклида).**

8.2. Фуллерены. Открытие фуллеренов - новой формы существования одного из самых распространенных элементов на Земле – углерода, признано одним из удивительных и важнейших открытий в науке XX столетия. За свое открытие - обнаружение углеродных кластеров состава C60 и C70 – американские ученые Р. Керл, Р. Смолли и Г. Крото в 1996 г. были удостоены Нобелевской Премии по химии. Ими же и была предложена структура фуллерена C60, похожая на оболочку футбольного мяча. Как известно, оболочка футбольного мяча скроена из 12 пентагонов и 20 гексагонов. Наиболее стабильный изомер имеет структуру усеченного икосаэдра, который был известен еще Архимеду. Этот изомер C60 получил название «Бакминстерфуллерен» в честь известного архитектора по имени R. Buckminster Fuller, создавшего сооружения, куполообразный каркас которых сконструирован из пентагонов и гексагонов. Российские ученые А.В. Елецкий и Б.М. Смирнов в своей статье [104] отмечают, что **«фуллерены, существование которых было установлено в середине 80-х, а эффективная технология выделения которых была разработана в 1990 г., в настоящее время стали предметом интенсивных исследований десятков научных групп. За результатами этих исследований пристально наблюдают прикладные фирмы. Поскольку эта модификация углерода преподнесла ученым целый ряд сюрпризов, было бы неразумным обсуждать прогнозы и возможные последствия изучения фуллеренов в ближайшее десятилетие, но следует быть готовым к новым неожиданностям».**

8.3. Закон структурной гармонии систем. Не только в кристаллографии и химии, но и в других областях науки, в частности, в философии, были проведены фундаментальные исследования, связанные с «золотым сечением». Речь идет, прежде всего, о научном открытии, сделанном белорусским философом Эдуардом Сороко [82] (см. выше). В чем же принципиальная особенность "Закона Сороко"? Начиная с Пифагора, ученые связывали понятие гармонии с единственной золотой пропорцией. **"Закон Сороко" утверждает, что гармоничное состояние системы, соответствующее классической золотой пропорции, не является единственным и что для одной и той же системы может существовать бесконечное количество "гармоничных" состояний, соответствующих обобщенным золотым *p*-пропорциям.** Существование таких состояний подтверждается многочисленными примерами из различных областей знаний [82].

8.4. Закон преобразования спиральных биосимметрий. Одной из важнейших проблем ботаники является «проблема филлотаксиса». Ботаники установили, что на поверхности плотно упакованных «филлотаксисных» объектов (сосновых шишек, кактусов, ананасов, головок подсолнечников и т.д.) всегда наблюдаются две группы спиралей, на пересечении которых находятся семена сосновых шишек, семечки подсолнухов, колючки кактусов и т.д. Изучая это уникальное ботаническое явление, ботаники установили, что отношение количества левых и правых «филлотаксисных» спиралей всегда соответствуют отношениям соседних чисел Фибоначчи: 1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, ... Эти отношения и составляют суть *закона филлотаксиса*. Однако при этом всегда остается неясным вопрос, как «спирали Фибоначчи» формируются на поверхности «филлотаксисных объектов» в процессе их роста. Экспериментальные наблюдения за ростом «филлотаксисных объектов» показало, что в процессе роста «филлотаксисного объекта» на его поверхности происходит изменение картины филлотаксиса согласно следующему математическому закону:

$$\frac{2}{1}\to\frac{3}{2}\to\frac{5}{3}\to\frac{8}{5}\to\frac{13}{8}\to\frac{21}{13}\to\dots\,. \tag{39}$$

Возникает вопрос, как объяснить модификацию (39) картины филлотаксиса на поверхности филлотаксисного объекта в процессе его роста? Вот на этот далеко не простой научный вопрос и попытался ответить украинский архитектор Олег Боднар. И надо отдать ему должное – сделал он это блестяще [85]. Он предположил, что «геометрия филлотаксиса» является неевклидовой, то есть, в ее основе лежат соотношения, основанные на гиперболических функциях. Надо отметить, что при этом он следовал идеям В.И. Вернадского, который одним из первых понял роль гиперболических представлений в биологии. Но применение классических гиперболических функций не дает ответа на вопрос, почему на поверхности «филлотаксисного объекта» появляются фибоначчиевые спирали. И здесь Боднар пришел к неожиданному заключению, что проблема решается очень просто, если ввести в рассмотрение так называемые «золотые» гиперболические функции, основанные на «золотой пропорции». Такое решение сразу же привело к созданию новой геометрии филлотаксиса, называемой «геометрией Боднара» [85]. **«Геометрия Боднара» является фундаментальным открытием современной науки, так как она раскрывает механизм роста «филлотаксисных объектов», то есть сосновых шишек, кактусов, ананасов, подсолнечников и т.д.**

8.5. Теория «*E*-infinity». В последние годы внимание физической науки привлечено к научному открытию английского физика египетского происхождения Мохаммеда Ель Нашие. В журнале «Chaos, Solitons and Fractals" он опубликовал много статей, посвященных этому открытию [104-109]. Суть открытия основана на обнаружении "золотого сечения» в знаменитом двух-щелевом эксперименте, который лежит в основе квантовой физике. На основе этого открытия Ель Нашие сделал ряд интересных предсказаний в развитии теоретической физики.

8.6. «Золотые» геноматрицы. Из последних научных публикаций, касающихся приложений «золотого сечения», наибольшее впечатление на автора произвела статья российского исследователя Сергея Петухова [111]. Как известно, открытие генетического кода, общего для всех живых организмов – от бактерии до человека – привело к развитию информационной точке зрения на живые организмы. Как подчеркивается в [111], «с этой точки зрения организмы представляют собой информационные сущности. Они существуют потому, что получают наследственную информацию от своих предков и живут для того, чтобы передать свой информационный генетический код потомкам. При таком подходе все остальные физические и химические механизмы, представленные в живых организмах, можно трактовать как вспомогательные, способствующие реализации этой основной – информационной – задачи».

Основы языка наследственной информации поразительно просты. Для записи генетической информации в рибонуклеиновых кислотах (РНК) любых организмов используется «алфавит», состоящий из четырех «букв» или азотистых оснований: аденин (*A*), цитозин (*C*), гуанин (*G*), урацил (*U*) (в ДНК вместо урацила используется родственный ему тимин (*T*)). Основная идея С.В. Петухова состоит в том, чтобы представлять генетические полиплеты в матричном виде. Простейшей является квадратная матрица второго порядка *P*, которая используется для представления системы из четырех азотистых оснований («букв») генетического алфавита. Для представления так называемых «триплетов» используется более сложная матрица, производная из матрицы *P*. Вводя понятия «символьных геноматриц» и «числовых геноматриц», Петухов затем показывает их связь с «золотым сечением» путем введения понятия «золотых геноматриц».

Открытие Петухова показывает фундаментальную роль, которую играет «золотое сечение» в генетическом кодировании. Открытие Петухова свидетельствует о том, что **ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ ЛЕЖИТ В ОСНОВЕ ЖИВОЙ ПРИРОДЫ!** Сейчас еще трудно оценить в полной мере революционный характер «геноматриц Петухова» для развития современной науки. Ясно одно, что для теории генетического кодирования – это результат такой же значимости, как и открытие самого генетического кода!

9. Заключение

Из проведенного исследования вытекают следующие выводы и предложения:

9.1. **Идея Гармония Мироздания и Золотого Сечения**, восходящая к Пифагорейскому учению о числовой гармонии мироздания, является древнейшей научной парадигмой, которая возникла в тот же период, как и сама наука. Эта идея относится к разряду «вечных» проблем, интерес к которой никогда не угасал в науке, но особенно возрастал в периоды наивысшего расцвета человеческой культуры. **Есть все основания полагать, что последняя четверть 20-го века и начало 21-го века стали периодами своеобразного Ренессанса этой древнейшей научной парадигмы в современной науке.** Современная наука, в которой преобладают процессы дифференциации, нуждается в некоторой междисциплинарной, интегрирующей и синтезирующей научной дисциплине, которая объединила бы все направления науки, искусства и технологии. И таким междисциплинарным научным направлением может стать **Учение о гармонии.** В его основе лежат следующие научные положения:

1. **Гармония царит во всем мире, она является упорядочивающим и творческим началом всей природы и космоса.**
2. **Вся природа и искусство – это целесообразно и гармонично устроенное целое. И в природе и в искусстве отдельные вещи и явления существуют как часть целого, как момент в общей системе красоты и гармонии.**
3. **«Математическая Гармония» является объективным и всеобщим свойством Мироздания в целом и любой ее части в отдельности. Все структуры природы стремятся к «гармоничному», то есть «оптимальному» (с некоторой точки зрения) состоянию.**

9. 2. **«Математика Гармонии»** является математической основой Учения о гармонии. Главным итогом «Математики Гармонии» следует считать преодоление основной «стратегической ошибки» в развитии математики 20-го века, а именно **преодоление разрыва между математикой и теоретическим естествознанием.** «Математика Гармонии» предлагает теоретическому естествознанию огромное количество новых математических соотношений и математических констант, которые могут быть использованы теоретическим естествознанием при создании новых моделей тех или иных явлений и процессов. В качестве примера можно привести процесс деления биологических клеток. Как показано в [112], процесс деления биологических клеток при их размножении на самом деле носит асимметричный характер; при этом именно p-числа Фибоначчи, соответствующие значениям p=2 и p=3, наиболее подходят для описания такого деления.

Однако наибольшим подтверждением эффективности приложений «Математики Гармонии» в теоретической физике являются **новые гиперболические модели Природы, основанные на «золотой пропорции», числах Фибоначчи и Люка и их обобщениях – «золотых *m*-пропорциях», а также *m*-числах Фибоначчи и Люка.** Новый класс гиперболических функций развивает и обобщает классическую «теорию чисел Фибоначчи» и превращает последнюю в непрерывную теорию, к которой применимы все математические методы «непрерывной математики» (в частности, интегрирование и дифференцирование). Новая геометрическая теория филлотаксиса, разработанная украинским архитектором Олегом Боднаром [81], является блестящим подтверждением эффективности приложения нового класса гиперболических функций для моделирования процессов, протекающих в живой природе. **«Золотой» гиперболический мир, основанный на функциях Фибоначчи и Люка и «геометрии Боднара», существует объективно и независимо от нашего сознания. Этот мир с удивительной настойчивостью проявляет себя, прежде всего, в живой природе, в частности, он обнаруживают себя на поверхности сосновых шишек, ананасов, кактусов, головок подсолнечника, корзинок цветов и т.д. в виде филлотаксисных спиралей, основанных на числах Фибоначчи, числах Люка и других числовых рекуррентных рядах подобного типа («Закон филлотаксиса»).**

9.3. **Сближение Математики и Искусства** является еще одним важным итогом развития «Математики Гармонии». Достаточно напомнить, что классическая «золотая пропорция» считалась «эстетическим каноном» египетского, греческого искусства, а также искусства Возрождения и других периодов в развитии культуры. Вполне возможным является возникновение новых «эстетических канонов» на основе математических констант,полученных в рамках «Математики Гармонии», в частности, на основе золотых *p*- и *m*-пропорций.

9.4. «Математика Гармонии» может привести к новым проектам в области компьютеров («компьютеры Фибоначчи», «троичные зеркально-симметричные компьютеры») и в области систем передачи информации («новая теория корректирующих кодов» и «золотая криптография»).

9.5. **«Математика Гармонии» может оказать существенное влияние на развитие современного образования.** Широкое внедрение научной парадигмы о числовой гармонии мироздания в массовое сознание может быть осуществлено путем введения комплекса курсов по Гармонии систем и Золотому Сечению, которые могут быть предложены системе образования для школ всех ступеней, дифференцируя их по уровням сложности:

9.3.1. Курс **«Начала гармонии»** должен быть введен в систему среднего образования в качестве завершающего курса научного и физико-математического образования школьников. Его главная цель – это выработка у учащихся нового восприятия Природы и Искусства, основанного на принципах Гармонии и Золотого Сечения.

9.3.2. Курс **„Основы гармонии систем”** должен быть введен в систему высшего образования в качестве завершающего курса научного и физико-математического образования бакалавров всех специализаций. Его главная цель – выработка у студентов нового научного мировоззрения, основанного на принципах Гармонии и Золотого Сечения.

9.3.3. Курс **„Математическая теория гармонии”** должен быть введен в систему высшего образования для определенной категории физико-математических, инжененрных и педагогических специальностей в качестве базового курса магистерской подготовки. Главная цель курса – изучение новой научной дисциплины „Математическая теория гармонии” как нового медисциплинарного направления современной науки.

В этой связи особый интерес может представлять новая книга автора **«The Mathematics of Harmony. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science”,** принятая к публикации Международным издательством «World Scientific” [16].

В заключение автор хотел бы выразить огромную благодарность академику **Юрию Алексеевичу Митропольскому**, при поддержке которого были опубликованы важные статьи автора по теории чисел Фибоначчи и «золотого сечения» в украинских академических журналах.

Литература

1. Morris Kline. The Loss of Certainty. New York. Oxford University Press. 1980. (Русский перевод: М. Клайн. Математика. Потеря определенности. Москва: Мир, 1984)

Книги и брошюры А.П. Стахова

2. Стахов А.П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва, Советское Радио, 1977 г.

3. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. Москва, Знание, серия «Математика и кибернетика», вып.6, 1979 г.
4. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва, Радио и связь, 1984 г.
5. Стахов А.П., Лихтциндер Б.Я., Орлович Ю.П., Сторожук Ю.А. Кодирование данных в информационно-регистрирующих системах. Киев, Техника, 1985 г.
6. Стахов А.П. (редактор). Помехоустойчивые коды: Компьютер Фибоначчи, Москва, Знание, серия «Радиоэлектроника и связь», вып.6, 1989 г.
7. Stakhov A.P. Computer Arithmetic based on Fibonacci Numbers and Golden Section: New Information and Arithmetic Computer Foundations». Toronto, SKILLSET-Training, 1997.
8. Stakhov A.P., Massingua V., Sluchenkova A.A. Introduction into Fibonacci Coding and Cryptography». Харьков, Изд-во «Основа» Харьковского университета, 1999 г.
9. Stakhov A.P. (editor). The Golden Section: Theory and Applications. Mozambique, University Eduardo Mondlane, Boletin de Informatica, No 9/10, January 1999.
10. Stakhov A.P., Sluchenkova A.A. Museum of Harmony and Golden Section: mathematical connections in Nature, Science and Art». Vinnitsa, ITI, 2003.
11. Stakhov A.P. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions: a New Mathematics for Living Nature. Vinnitsa, ITI, 2003.
12. Стахов А.П. Новая математика для живой природы: Гиперболические функции Фибоначчи и Люка». Винница, Изд-во «ITI», 2003.
13. Стахов А.П. Под знаком «Золотого Сечения»: Исповедь сына студбатовца. Винница, ITI, 2003.
14. Стахов А.П. Сакральная Геометрия и Математика Гармонии. Винница, ITI, 2003.
15. Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Санкт-Петербург: Питер, 2006.
16. Stakhov A.P. The Harmony Mathematics. From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. New Jersey. London. Singapore. Hong Kong: World Scientific (in press)

Статьи А.П. Стахова в российских и украинских журналах и сборниках

17. Стахов А.П. Избыточные двоичные позиционные системы счисления. В сборнике «Однородные цифровые вычислительные и интегрирующие структуры», вып.2, Изд-во Таганрогского радиотехнического института, 1974 г.
18. Стахов А.П. Измерение и поиск. В сборнике «Проблемы случайного поиска», №3, Рига, Изд-во «Зинатне», 1974 г.
19. Стахов А.П. Использование естественной избыточности «фибоначчиевых» систем счисления для контроля вычислительных систем. Автоматика и вычислительная техника, №6, 1975 г.
20. Стахов А.П. Принцип асимметрии логики измерения. Проблемы передачи информации, №3, 1976 г.
21. Стахов А.П. «Фибоначчиевые» двоичные позиционные системы счисления. В сборнике «Кодирование и передача дискретных сообщений в системах связи». Москва, Наука, 1976 г.
22. Стахов А.П. Методологические аспекты введения кодовой избыточности в цифровые вычислительные машины. Автоматика и вычислительная техника, №15, 1976 г.
23. Стахов А.П. Цифровая метрология в кодах Фибоначчи и кодах золотой пропорции. В сборнике «Современные проблемы метрологии». Москва, Изд-во Всесоюзного заочного машиностроительного института, 1978 г.
24. Стахов А.П. «Золотая» пропорция в цифровой технике. Автоматика и вычислительная техника, №1, 1980 г.
25. Стахов А.П., Лужецкий В.А. Машинная арифметика ЦВМ в кодах Фибоначчи и «золотой» пропорции. Москва, Изд-во АН СССР, Научный совет по комплексной проблеме «Кибернетика», 1981 г.
26. Стахов А.П. Перспективы применения систем счисления с иррациональными основаниями в технике аналого-цифрового и цифроаналогового преобразования. Журнал «Измерения, Контроль, Автоматизация», №6, 1981 г.
27. Стахов А.П. Коды золотой пропорции или системы счисления для ЭВМ будущего? Журнал «Техника — молодежи», №7, 1985 г.
28. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения и основания компьютерной арифметики. Журнал «Измерения, Контроль, Автоматизация», №2, 1988 г.
29. Стахов О.П. За принципом золотої пропорції: перспективний шлях розвитку обчислювальної техніки. Вісник Академії наук Української РСР, №1-2, 1990 г. Стахов О.П. Вимірювання — фундаментальна проблема науки. Вісник Академії наук Української РСР, №6, 1991 г.
30. Стахов О.П. Золотий переріз і наука про гармонію систем. Вісник Академії наук Української РСР», №12, 1991 г.
31. Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР, том 208, № 7, 1993 г.

32. Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения: новый взгляд на теорию позиционных систем счисления и компьютерную арифметику. Международный научный журнал «Управляющие системы и машины», №4-5, 1994.
33. Stakhov AP. A generalization of the Fibonacci *Q*-matrix. Доклады Академии наук Украины, 1999, №9, с. 46-49.
34. Стахов О.П. Чи може бути створена нова елементарна математика, що базується на «Золотому Перетині»? Наукові записки Вінницького державного педагогічного університету. Серія «Фізика і математика», вип. 1, 2002 р.
35. Стахов А.П. Обобщенные золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа. Украинский математический журнал*,* том. 56, 2004 г.
36. Стахов А.П. Сакральная Геометрия и Математика Гармонии. Труды Международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве», Винница, 2003 г.
37. Стахов А.П. Кодирование данных, основанное на фибоначчиевых матрицах. Труды Международной конференции «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве», Винница, 2003 г.
38. Стахов А.П. Золотое сечение, священная геометрия и математика гармонии. Сборник «Метафизика. Век XXI». Москва: БИНОМ, 2006, с. 174-215

Статьи А.П. Стахова в международных журналах и сборниках

39. Стахов А.П., Розин Б.Н. Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка. Number, Time, Relativity. Proceedings of International Scientific Meeting. Moscow, 10 August – 13 August, 2004.
40. Стахов А.П., Розин Б.Н. Новый класс гиперболических функций. Труды Института прогрессивных исследований, вып. 4, Израиль, Арад, 2004 г.
41. Стахов А.П. Коды и компьютеры Фибоначчи, матрицы Фибоначчи и новая теория кодирования. Труды Института прогрессивных исследований, вып. 4, Израиль, Арад, 2004 г.
42. Stakhov A.P. The Medial Section as a Proportion for the Thermo-dynamical Equilibrium of Self-organizing Systems. Proceedings of the International Symposium «System Analysis and Simulation», Berlin, 1988.
43. Stakhov A.P. The Golden Section in the measurement theory. An International Journal «Computers & Mathematics with Applications», Volume 17, No 4-6, 1989.
44. Stakhov A.P. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers, Volume 7, 1998.
45. Stakhov AP. Brousentsov's ternary principle, Bergman's number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic. The Computer Journal 2002, Vol. 45, No. 2: 222-236.
46. Stakhov A, Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals 2004, **23(2):** 379-389.
47. Stakhov A., Rozin B. The Golden Shofar . Chaos, Solitons & Fractals 2005, **26(3);** 677-684.
48. Stakhov A., Rozin B. The "golden" algebraic equations. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27 (5):** 1415-1421.
49. Stakhov A., Rozin B. Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27 (5):** 1162-1177.
50. Stakhov A., Rozin B. The continuous functions for the Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals 2006, **28 (4)**: 1014-1025.
51. Stakhov A. The Generalized Principle of the Golden Section and its applications in mathematics, science, and engineering. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **26 (2)**: 263-289.
52. Stakhov A. Fundamentals of a new kind of Mathematics based on the Golden Section. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27 (5)**: 1124-1146.
53. Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the "Cassini formula", and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals, 2006, Volume 30, Issue 1, 56-66.
54. Stakhov A. The "golden" matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons & Fractals 2007, Volume 32, Issue 3, 1138-1146.
55. Stakhov A. Rozin B. The Golden Section, Fibonacci series and new hyperbolic models of Nature. Visual Mathematics, Volume 8, No. 3, 2006 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)
56. Stakhov A. Three "key" problems of mathematics on the stage of its origin, the "Harmony Mathematics" and its applications in contemporary mathematics, theoretical physics and computer science. Visual Mathematics, Volume 9, No.3, 2007 (http://members.tripod.com/vismath/pap.htm)

Электронные публикации А.П. Стахова

57. Стахов А.П., Слученкова А.А. Музей Гармонии и Золотого Сечения, 2001 (www.goldenmuseum.com/).
58. Stakhov A.P. Museum of Harmony and the Golden Section: mathematical connections in Nature, Science and Art, 2002 (www.fenkefeng.org/essaysm18004.html)

59. Стахов А.П. Компьютер Фибоначчи. Москва, PC Week, 2002, № 34 (352) (www.pcweek.ru/Year2002/N34/CP1251/Strategy/chapt2.htm)
60. Стахов А.П. Компьютер Фибоначчи (www.ssga.ru/erudites_info/computers/kompfib.html)
61. Стахов А.П. Компьютеры Фибоначчи и новая теория кодирования: история, теория, перспективы. Электронный журнал Таганрогского радиотехнического университета «Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы», № 2 (18), 2004 (http://pitis.tsure.ru/files18/p5.pdf)
62. Стахов А.П., Розин Б.Н. Теория формул Бине для *p*-рядов Фибоначчи и Люка. Электронный журнал Таганрогского радиотехнического университета «Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы», № 1 (21), 2005 (http://pitis.tsure.ru/files21/10.pdf).
63. Стахов А.П. Сакральная геометрия и математика гармонии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.11176, 26.04.2004 (www.trinitas.ru/rus/doc/0202/010a/02020028.htm).
64. Стахов А.П. Математика Гармонии как новое междисциплинарное направление современной науки // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12371, 19.08.2005(www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320001.htm)
65. Стахов А.П. «Металлические Пропорции» Веры Шпинадель // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12532, 25.10.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320029.htm)
66. Стахов А.П. Формула Кассини // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12542, 01.11.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320030.htm)
67. Стахов А.П. «Код да Винчи», Платоновы и Архимедовы тела, квазикристаллы, фуллерены, решетки Пенроуза и художественный мир Матюшки Тейи Крашек // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12561, 07.11.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320031.htm)
68. Стахов А.П., Розин Б.Н. «Золотые» гиперболические модели Природы // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12616, 22.11.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320034.htm)
69. Стахов А.П. Троичный принцип Брусенцова, система счисления Бергмана и «золотая» троичная зеркально-симметричная арифметика // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12355, 15.08.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02320001.htm)
70. Стахов А.П. Теорема Пифагора и числа Фибоначчи // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12403, 06.09.2005 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/003a/02320003.htm)
71. Стахов А.П. Додекаэдр, тайна Египетского календаря, циклы Солнечной Системы и «Арифметика Вселенной» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13065, 10.03.2006 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320039.htm)
72. Стахов А.П. Матричный подход в «теории Золотого Сечения» и «золотые» геноматрицы Сергея Петухова // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13439, 15.06.2006 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321050.htm)
73. Стахов А.П. «Принцип Золотой Пропорции» в «Началах» Евклида и «Обобщенный Принцип Золотого Сечения» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13523, 06.07.2006 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321051.htm)
74. Стахов А.П. Еще раз о математической истории Золотого Сечения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.13714, 25.08.2006 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321029.htm)
75. Стахов А.П. Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm)
76. Стахов А.П. Три «ключевые» проблемы математики на этапе ее зарождения и новые направления в развитии математики, теоретической физики и информатики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14135, 12.01.2007 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321064.htm)
77. Стахов А.П. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка: история и приложения // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14429, 31.05.2007 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321057.htm)
78. Стахов А.П. «Стратегические ошибки» в развитии математики // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14555, 27.08.2007 (www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321070.htm)
79. Стахов А.П. Важнейшие научные открытия современной науки, основанные на «золотом сечении» // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14575, 18.09.2007 (http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321071.htm)

Другие публикации

80. А. Лебег. Об измерении величин. Пер. с французского. Москва: Учпедгиз, 1960
81. Метафизика. Век XXI (сост. и ред. Ю.С. Владимиров). Москва: БИНОМ, 2006.
82. Э.М. Сороко. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984.
83. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. Москва: Наука, 1991.
84. Zenkin A.A. Super-Induction Method: Logical Akupuncture of Mathematical Infinity. - Twentieth World Congress of Philosophy. Boston, U.S.A., 1998. Proceedings, Section "Logic and Philosophy of Logic."

85. Боднар О.Я. Золотое Сечение и неевклидова геометрия в Природе и Искусстве. Львов: Свит, 1994.
86. Клейн Феликс. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени. М., 1989.
87. Bergman G. A number system with an irrational base // Mathematics Magazine, 1957, No 31: 98-119.
88. Шестаков В.П. Гармония как эстетическая категория. Москва: Наука, 1973.
89. Волошинов А.В. Математика и искусство. Москва, Просвещение, 2000 г.
90. Боднар О.Я. Учение о гармонии – в систему образования // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.12775, 02.01.2006
91. Шубников А.В. Гармония в природе и искусстве. Природа, 1927, №7-8, с. 609-622
92. Глейзер Г.И. История математики в школе. Москва: Просвещение, 1964.
93. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва, Наука, 1978.
94. Hoggat, V. E. *Fibonacci and Lucas Numbers*, Houghton-Mifflin, Palo Alto, California, 1969.
95. Vera W. de Spinadel. From the Golden Mean to Chaos. Nueva Libreria, 1998 (second edition, Nobuko, 2004).
96. Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (русский перевод, 2002).
97. Kappraff Jay. Beyond Measure. A Guided Tour Through Nature, Myth, and Number. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002.
98. Илиев Л. Математика как наука о моделях. Успехи математических наук, том 27, вып.2, 1972.
99. Peterson WW, Weldon E.J. Error-correcting codes. Cambridge, Massachusetts, and London: The MIT Press, 1972.
100. Menezes A., Van Oorshot P.C. and Vanstone S.A. Handbook on Applied Cryptography. Boca Raton. Florida: CRC Press, 1996.
101. Mollin, Richard A. An Introduction to Cryptography. Second Sedition: CRC, Champan & Hall (2001).
102. Hybrid cryptosystems. From Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Hybrid_cryptosystem
103. Гратиа Д. Квазикристаллы. Москва, *Успехи физических наук,* 1988, том 156, вып. 2, с. 347-363
104. Елецкий А.В., Смирнов Б.М. Фуллерены. *Успехи физических наук,* 1993, том 163, №2.
105. El Naschie M.S. On dimensions of Cantor set related systems. Chaos, Solitons & Fractals 1993; 3: 675-685.
106. El Nashie M.S. Quantum mechanics and the possibility of a Cantorian space-time. Chaos, Solitons & Fractals 1992; 1: 485-487.
107. El Nashie M.S. Is Quantum Space a Random Cantor Set with a Golden Mean Dimension at the Core? Chaos, Solitons & Fractals, 1994; 4(2); 177-179.El Naschie M.S. On a class of general theories for high energy particle physics. Chaos, Solitons & Fractals 2002; 14: 649-668.
108. El Naschie M.S. From symmetry to particles. Chaos, Solitons & Fractals, 2007; 32: 427-430.
109. El Naschie M.S. On the topologic ground state of *E*-infinity space-time and super string connection. Chaos, Solitons & Fractals, 2007; 32: 468-470.
110. El Naschie M.S. Hilbert space, Poincaré dodecahedron and golden mean transfiniteness. Chaos, Solitons & Fractals, 2007, 31 (4), 787-793.
111. Петухов С.В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кодирования и золотое сечение. Метафизика. Москва, Бином, 2006. — 216-250
112. Spears C.P., Bicknell-Johnson M. Asymmetric cell division: binomial identities for age analysis of mortal vs. immortal trees, Applications of Fibonacci Numbers, Vol. 7, 1998, 377-391.